

Cálculo I

Engenharia Electromecânica

António Bento

Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior

2009/2010

António Bento (UBI)

Cálculo I

2009/2010

1 / 451

Bibliografia

- Apostol, T.M., *Cálculo*, Vol. 1, Reverté, 1993
- Azenha, A., Jerónimo, M. A., *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n* , McGraw-Hill, 1995
- Dias Agudo, F.R., *Análise Real*, Vol. I, Escolar Editora, 1989
- Demidovitch, B., *Problemas e exercícios de Análise Matemática*, McGrawHill, 1977
- Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol. 1, Projecto Euclides, IMPA, 1989
- Lima, E. L., *Análise Real*, Vol. 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004
- Mann, W. R., Taylor, A. E., *Advanced Calculus*, John Wiley and Sons, 1983
- Sarrico, C., *Análise Matemática – Leituras e exercícios*, Gradiva, 3^a Ed., 1999
- Stewart, J., *Calculus (International Metric Edition)*, Brooks/Cole Publishing Company, 2008
- Swokowski, E. W., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 1 e 2, McGrawHill, 1983

António Bento (UBI)

Cálculo I

2009/2010

2 / 451

Índice

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

António Bento (UBI)

Cálculo I

2009/2010

3 / 451

Índice

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
 - O conjunto dos números reais
 - Definição e exemplos de funções; função inversa; composição de funções
 - Função exponencial e função logarítmica
 - Funções trigonométricas e suas inversas
 - Funções hiperbólicas
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

António Bento (UBI)

Cálculo I

2009/2010

4 / 451

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
 - O conjunto dos números reais
 - Definição e exemplos de funções; função inversa; composição de funções
 - Função exponencial e função logarítmica
 - Funções trigonométricas e suas inversas
 - Funções hiperbólicas
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

§1.1 O conjunto dos números reais

No conjunto dos números reais, que representaremos por \mathbb{R} , estão definidas duas operações:

- uma **adição**, que a cada par de números reais (a, b) faz corresponder um número $a + b$;
- uma **multiplicação**, que a cada par (a, b) associa um número representado por $a \cdot b$ (ou $a \times b$ ou simplesmente ab).

Estas operações verificam as seguintes propriedades:

Propriedades da adição

- A1) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\text{associatividade})$$
- A2) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b = b + a \quad (\text{comutatividade})$$
- A3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{R}$, designado por "zero", tal que para cada $a \in \mathbb{R}$

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (\text{elemento neutro})$$
- A4) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe um elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad (\text{simétrico})$$

§1.1 O conjunto dos números reais

Propriedades da multiplicação

- M1) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(bc) = (ab)c \quad (\text{associatividade})$$
- M2) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ab = ba \quad (\text{comutatividade})$$
- M3) Existe um elemento $1 \in \mathbb{R}$, diferente de zero e designado por "unidade", tal que para cada $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (\text{elemento neutro})$$
- M4) Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \quad (\text{inverso})$$

Distributividade da multiplicação em relação à adição

- D1) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(b + c) = (b + c)a = ab + ac \quad (\text{distributividade})$$

Associadas a estas operações estão duas outras operações, a **subtração** e a **divisão**. A subtração entre dois números reais a e b representa-se por $a - b$ e é definida por

$$a - b = a + (-b).$$

A divisão entre dois números reais a e b com $b \neq 0$ representa-se por $\frac{a}{b}$ (ou $a \div b$ ou a/b) e é definida por

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

A $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, também se chama **fracção** entre a e b .

Exercício

Efectue as seguintes operações

$$a) \frac{2}{3} + \frac{3}{2};$$

$$b) \frac{2}{3} - \frac{3}{2};$$

$$c) \frac{3}{2} - \frac{2}{3};$$

$$d) \frac{2}{3} \times \frac{4}{3};$$

$$e) \frac{2}{3} \div \frac{4}{3};$$

Propriedades das fracções

Sejam a , b , c e d números reais tais que $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Então

$$\bullet \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$\bullet \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\bullet \text{ se } c \neq 0, \text{ então } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Lei do corte da adição

Sejam a , b e c números reais. Então

$$a + c = b + c$$

se e só se

$$a = b.$$

Lei do corte da multiplicação

Sejam a , b e c números reais com $c \neq 0$. Então

$$ca = cb$$

se e só se

$$a = b.$$

Lei do anulamento do produto

Dados números reais a e b tem-se

$$ab = 0$$

se e só se

$$a = 0 \quad \text{e/ou} \quad b = 0.$$

Resolução de equações de primeiro grau

Sejam a e b números reais. Então

$$i) \quad a + x = b \Leftrightarrow x = b - a;$$

$$ii) \quad ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \quad \text{onde } a \neq 0;$$

Fórmula resolvente (de equações de segundo grau)

Sejam a , b e c números reais, com $a \neq 0$. Então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Casos notáveis da multiplicação

Se a e b são números reais, então

$$i) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$ii) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$iii) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Exercício

Calcule, em \mathbb{R} , o conjunto solução das seguintes equações

$$a) \quad 18x - 43 = 65;$$

$$b) \quad 23x - 16 = 14 - 17x;$$

$$c) \quad 10y - 5(1 + y) = 3(2y - 2) - 20;$$

$$d) \quad x(x + 4) + x(x + 2) = 2x^2 + 12;$$

$$e) \quad \frac{x - 5}{10} + \frac{1 - 2x}{5} = \frac{3 - x}{4};$$

$$f) \quad x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$g) \quad x^2 - 4 = 0;$$

$$h) \quad 3x^2 - 6x = 0;$$

$$i) \quad x^2 + 6x + 8 = 0;$$

$$j) \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0;$$

$$k) \quad x^2 - 6x + 9 = 0;$$

$$l) \quad x^2 + x + 1 = 0.$$

Ordem

Existe um subconjunto de \mathbb{R} , que se designa por conjunto dos números reais positivos e que se representa por \mathbb{R}^+ , que verifica as seguintes propriedades:

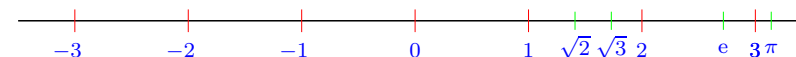
a) Se $a, b \in \mathbb{R}^+$, então

$$a + b \in \mathbb{R}^+ \text{ e } ab \in \mathbb{R}^+.$$

b) Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\text{ou } a \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } -a \in \mathbb{R}^+.$$

A relação de ordem permite-nos representar os números reais numa recta ou num eixo.



Usando o conjunto \mathbb{R}^+ podemos definir em \mathbb{R} uma relação de ordem. Dados dois elementos $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que a é **menor do que** b , e escrevemos

$$a < b,$$

se

$$b - a \in \mathbb{R}^+.$$

Diz-se que a é **menor ou igual do que** b , e escreve-se

$$a \leq b,$$

se

$$a < b \quad \text{ou} \quad a = b.$$

As relações de ordem que definimos previamente permitem-nos definir vários subconjuntos de \mathbb{R} chamados **intervalos**. Dados dois números reais tais que $a \leq b$, temos os seguintes conjuntos:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\};$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\};$$

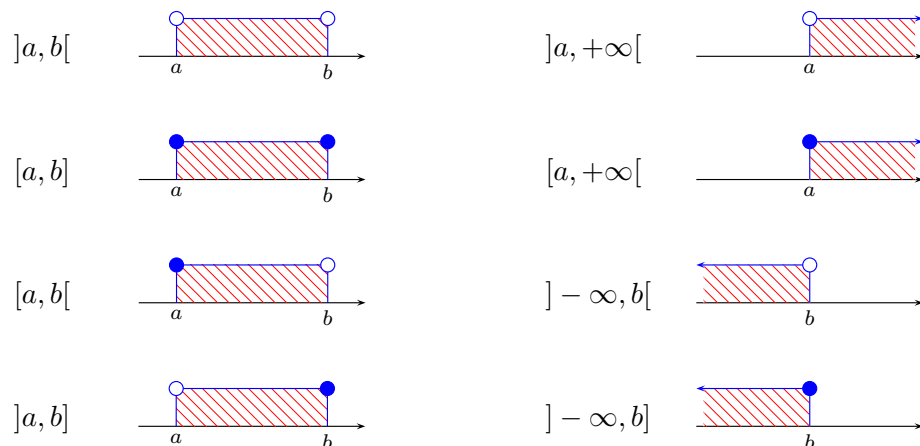
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\};$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\};$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\};$$

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Representação geométrica dos intervalos



Propriedades de ordem

Para quaisquer números reais a, b, c e d , tem-se

- a) se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
- b) se $a \neq b$, então ou $a < b$ ou $b < a$;
- c) se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;
- d) se $a \neq 0$, então $a^2 > 0$;
- e) $a < b$ se e só se $a + c < b + c$;
- f) se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
- g) se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$;
- h) se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$;
- i) se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$;
- j) se $a < 0$, então $a^{-1} < 0$;
- k) se $a < b$, então $a < \frac{a+b}{2} < b$;
- l) $ab > 0$ se e só se $(a > 0 \text{ e } b > 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b < 0)$.

Exercício

Determine, em \mathbb{R} , o conjunto solução das seguintes condições:

- a) $2x + 7 > 3$;
- b) $4 - 3x \leq 6$;
- c) $1 < 3x + 4 \leq 16$;
- d) $0 \leq 1 - x < 1$;
- e) $-5 \leq 3 - 2x \leq 9$;
- f) $4x < 2x + 1 \leq 3x + 2$;
- g) $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$;
- h) $(2x + 3)(x - 1) \geq 0$;
- i) $2x^2 + x \leq 1$;
- j) $x^2 + x + 1 > 0$;
- k) $x^2 + x > 1$;
- l) $x^2 < 3$;
- m) $x^2 \geq 5$;
- n) $x^3 - x^2 \leq 0$;
- o) $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geq 0$.

Intuitivamente, poderíamos construir os **números naturais** da seguinte forma:

- 1 é um número natural;
- $1 + 1$ que representamos por 2 é um número natural;
- $1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 3$ é um número natural;
- etc.

Assim,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

A partir dos números naturais podemos definir os números inteiros e os números racionais.

Um número real diz-se um **número inteiro** se for um número natural, ou se o seu simétrico for um número natural ou se for zero, isto é, o conjunto dos números inteiros é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m \in \mathbb{R} : -m \in \mathbb{N}\}.$$

Um **número racional** é um número real que pode ser representado como o quociente entre dois números inteiros, isto é, o conjunto dos números racionais é o conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Os números racionais também podem ser definidos através da representação decimal. Um número real é racional se no sistema decimal tiver uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica.

Assim, o número

$$0,333333\dots$$

é um número racional, que também se representa por

$$0,3(3)$$

Além disso, este número também pode ser representado por

$$\frac{1}{3}.$$

Aos números reais que não são racionais chamamos de **números irracionais**.

Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π e e são números irracionais.

As inclusões seguintes são óbvias:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

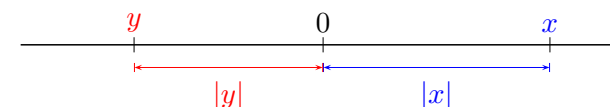
Por **valor absoluto** ou **módulo** de um elemento $x \in \mathbb{R}$ entende-se o número real $|x|$ definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Uma forma equivalente de definir o módulo de um número real x é a seguinte

$$|x| = \max \{x, -x\}.$$

Geometricamente, o módulo de um número dá-nos a distância desse número à origem.

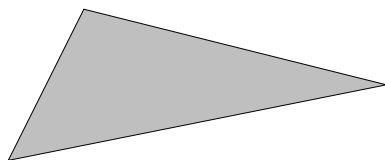


Propriedades do módulo

Para quaisquer números reais a, b tem-se

- a) $|a| = 0$ se e só se $a = 0$;
- b) $|a| \geq 0$;
- c) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- d) $|a + b| \leq |a| + |b|$; (desigualdade triangular)

A propriedade d) denomina-se **desigualdade triangular** pelo facto de num triângulo o comprimento de qualquer lado ser menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.



$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

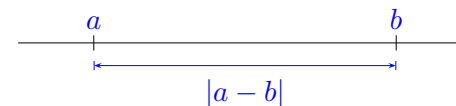
Propriedades do módulo (continuação)

- a) $|x| = a, \quad a \geq 0$
 $\Leftrightarrow x = a \vee x = -a$
- b) $|x| < a$
 $\Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$
- c) $|x| \leq a$
 $\Leftrightarrow x \leq a \wedge x \geq -a$
- d) $|x| > a$
 $\Leftrightarrow x > a \vee x < -a$
- e) $|x| \geq a$
 $\Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

Podemos usar o módulo para calcular a distância entre dois números reais. A distância entre dois números reais a e b é dada por

$$|a - b|.$$

Geometricamente,



- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
 - O conjunto dos números reais
 - Definição e exemplos de funções; função inversa; composição de funções
 - Função exponencial e função logarítmica
 - Funções trigonométricas e suas inversas
 - Funções hiperbólicas
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

A natureza da regra associada a $f: A \rightarrow B$, e que nos permite determinar o valor de $f(x)$ quando é dado $x \in A$, é inteiramente arbitrária, tendo apenas que verificar duas condições:

- 1) não pode haver exceções, isto é, para que o conjunto A seja o domínio de f a regra deve de fornecer $f(x)$ para todo o $x \in A$;
- 2) não pode haver ambiguidades, ou seja, a cada $x \in A$ a regra deve fazer corresponder um único $f(x) \in B$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é definida à custa de três coisas:

- um conjunto A a que se chama **domínio** da função;
- um conjunto B chamado de **conjunto de chegada** da função;
- uma **regra** que a cada elemento de $x \in A$ faz corresponder um e um só elemento de B , elemento esse que se representa por $f(x)$.

Referimo-nos a $x \in A$ como um **objecto** e a $f(x) \in B$ como a sua **imagem por f** , respectivamente. Também usamos a expressão valor de f em x para nos referirmos à imagem $f(x)$.

Ao conjunto das imagens chamamos **contradomínio** de f , ou seja, o contradomínio é o conjunto

$$f(A) = \{f(x) \in B : x \in A\}.$$

As funções f que nós vamos estudar são **funções reais de variável real**, ou seja, o domínio da função f é um subconjunto de \mathbb{R} e o conjunto de chegada é o conjunto dos números reais \mathbb{R} . O domínio costuma representar-se por D ou D_f e usa-se a seguinte notação

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

ou, de forma mais abreviada,

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Exemplo – Primeira Lei de Ohm

A primeira lei de Ohm diz que a intensidade I da corrente eléctrica é dada pelo quociente entre a grandeza diferença de potencial V e a resistência eléctrica R do condutor:

$$I = \frac{V}{R}.$$

Assim, num circuito eléctrico a intensidade da corrente pode ser vista como uma função da diferença de potencial.

Exemplo – Funções quadráticas

As funções definidas por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

designam-se por **funções quadráticas**. O seu domínio é o conjunto \mathbb{R} dos números reais e o contradomínio é o intervalo

$$\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty \right[$$

se $a > 0$ e se $a < 0$ é o intervalo

$$\left] -\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right].$$

Exemplo – Funções afim

As funções dada por

$$f(x) = ax + b,$$

onde a e b são dois números reais fixos, designam-se por **funções afim**. Quando $b = 0$, a expressão reduz-se a

$$f(x) = ax$$

e exprime que as variáveis entre x e $y = f(x)$ existe proporcionalidade directa, visto que o quociente dos dois valores correspondentes é constante:

$$\frac{y}{x} = a.$$

Dizemos então a função definida é **linear**. O domínio de uma função afim é sempre o conjunto dos números reais. O contradomínio é o conjunto \mathbb{R} dos números reais, excepto no caso em que $a = 0$. Quando $a = 0$ o contradomínio é o conjunto singular $\{b\}$.

Exercício 4 da ficha 2

Sejam c e f duas variáveis representando a mesma temperatura medida respectivamente em graus Celsius (C) e em graus Fahrenheit (F). A relação entre c e f é descrita por uma função afim. O ponto de congelamento da água é de $c = 0^\circ\text{C}$ ou $f = 32^\circ\text{F}$. A temperatura de ebulição é de $c = 100^\circ\text{C}$ ou $f = 212^\circ\text{F}$.

- Determine a fórmula de conversão da temperatura em graus Fahrenheit para a temperatura em graus Celsius.
- Existe alguma temperatura para a qual os valores em graus Celsius e Fahrenheit sejam iguais? Determine-a em caso afirmativo.
- A relação entre a temperatura absoluta k , medida em graus Kelvin (K), e a temperatura c , em graus Celsius (C), é descrita por uma função afim. Sabendo que $k = 273^\circ\text{K}$ quando $c = 0^\circ\text{C}$ e $k = 373^\circ\text{K}$ quando $c = 100^\circ\text{C}$ determine k em função de f .

Exercício 2 da ficha 2

Uma haste rígida, feita de material muito leve, de modo que podemos considerar o seu peso desprezável, gira em torno de um eixo. Numa das extremidades, à distância de 1 metro do eixo, está colocado um peso de 3 Kg. Para que a haste fique em equilíbrio (isto é, no plano horizontal do eixo), colocamos um outro peso de P Kg no outro lado da haste e à distância d (metros) do eixo; verifica-se experimentalmente que o equilíbrio é conseguido se os valores de d e P se correspondem de acordo com a tabela

d	1	0.5	0.3	0.1	0.05
P	3	6	10	30	60

É possível concluir da análise destes dados que as grandezas P e d são inversamente proporcionais.

- Identifique a expressão que permite escrever P como função de d .
- Determine o domínio da função $P(d)$.

Dada uma função real de variável real $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto

$$\mathcal{G}(f) = \{(a, f(a)) : a \in D\}$$

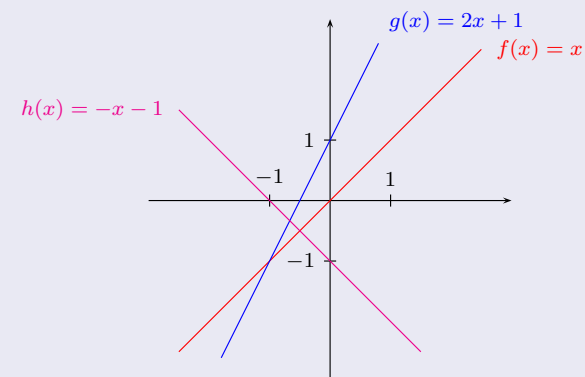
designa-se por **gráfico de f** . Obviamente, este conjunto pode ser representado no plano e a essa representação geométrica também se chama gráfico.

Exemplo

As funções afim $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g(x) = 2x + 1 \quad \text{e} \quad h(x) = -x - 1$$

tem os seguintes gráficos:

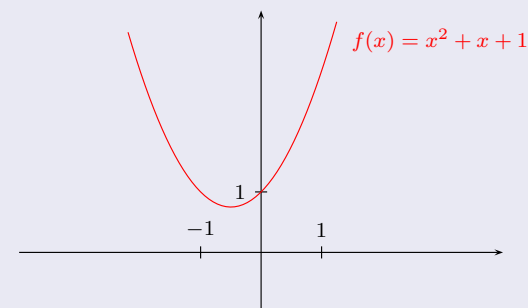


Exemplo

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Por exemplo, a função dada por

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

tem o seguinte gráfico

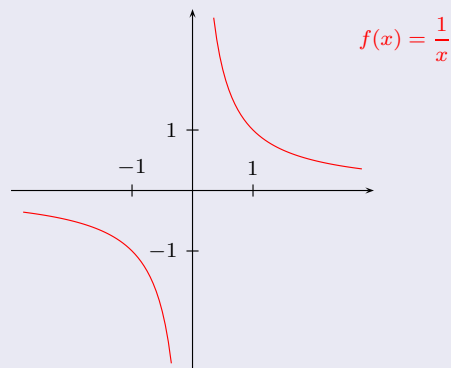


Exemplo

As função dada por

$$f(x) = 1/x$$

cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tem o seguinte gráfico



Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Dizemos que f é **injectiva** se

para quaisquer $a, b \in D$ tais que $a \neq b$ se tem $f(a) \neq f(b)$.

A função f é **sobrejectiva** se

para cada $b \in \mathbb{R}$, existe $a \in D$ tal que $f(a) = b$.

Obviamente, uma função real de variável real é sobrejectiva se o seu contradomínio for o conjunto \mathbb{R} dos números reais.

As funções que são injectivas e sobrejectivas dizem-se **bijectivas**.

Exemplo

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = 2x + 3.$$

Como

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow 2a + 3 = 2b + 3$$

$$\Leftrightarrow 2a = 2b$$

$$\Leftrightarrow a = b,$$

a função f é injectiva. Além disso, dado $b \in \mathbb{R}$, fazendo $a = \frac{b-3}{2}$ temos

$$f(a) = f\left(\frac{b-3}{2}\right) = \frac{b-3}{2} + 3 = b + 3 - 3 = b,$$

o que mostra que f é sobrejectiva.

Exemplo

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injectiva porque

$$f(-1) = f(1).$$

Além disso, também não é sobrejectiva porque o seu contradomínio é o intervalo $[0, +\infty[$.

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real injectiva. Recordemos que o conjunto de todas as imagens por f de elementos de D , ou seja, o conjunto

$$f(D) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in D\},$$

se designa por contradomínio de f . Como f é injectiva, dado $y \in f(D)$, existe um e um só $x \in D$ tal que

$$f(x) = y.$$

Nestas condições podemos definir a **inversa** da função f que a cada $y \in f(D)$ faz corresponder $x \in D$ tal que $f(x) = y$. Essa inversa representa-se por f^{-1} e é a função

$$f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$f^{-1}(y) = x \text{ se e só se } f(x) = y.$$

É evidente que para cada $x \in D$ e para cada $y \in f(D)$ se tem

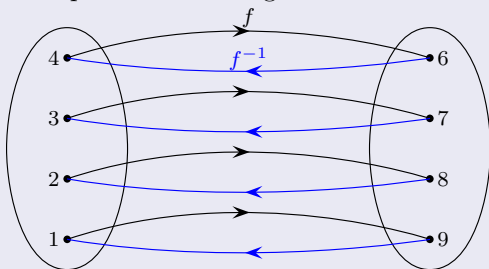
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Exemplo

A função $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(1) = 9, f(2) = 8, f(3) = 7 \text{ e } f(4) = 6$$

é injectiva e pode ser representada da seguinte forma:



e a sua inversa é a função $f^{-1}: \{6, 7, 8, 9\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f^{-1}(6) = 4, f^{-1}(7) = 3, f^{-1}(8) = 2 \text{ e } f^{-1}(9) = 1.$$

Exemplo

Consideremos novamente a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x + 3.$$

Já vimos que esta função é injectiva e, consequentemente, tem inversa. Além disso, o contradomínio de f é \mathbb{R} e, portanto,

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

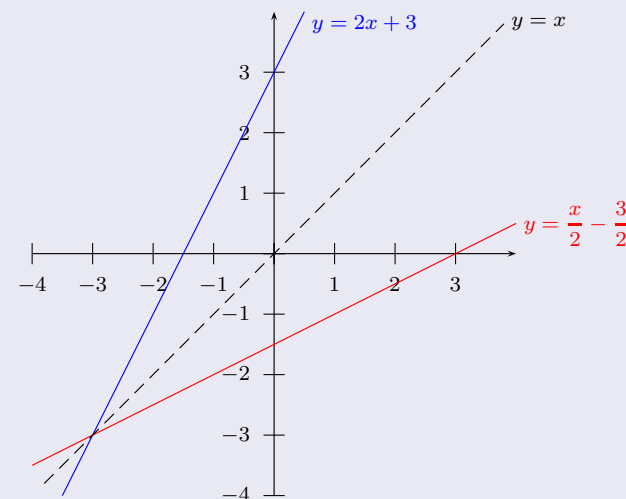
Como

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow -2x = -y + 3 \\ &\Leftrightarrow 2x = y - 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

f^{-1} é definida por

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}.$$

Exemplo (continuação)



Exemplo

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = x^2.$$

Esta função não é injectiva porque, por exemplo,

$$f(-1) = f(1) = 1.$$

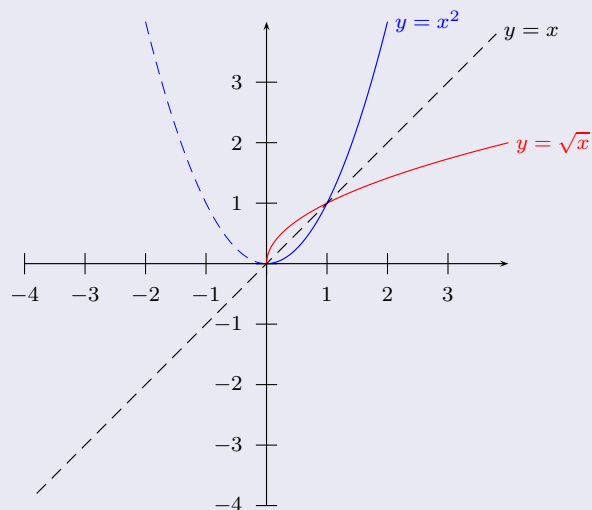
Assim, a função f não tem inversa. No entanto, se pensarmos na restrição desta função a $[0, +\infty[$, ou seja, se usarmos a função $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$, esta função já é injectiva pelo que podemos pensar na sua inversa. Como o seu contradomínio é $[0, +\infty[$ e $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$, a função

$$g^{-1}: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

é definida por

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Exemplo (continuação)



Sejam

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

duas funções reais de variável real. A **função composta de g com f** é a função

$$g \circ f: D_{g \circ f} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

de domínio

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\},$$

definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemplo

Sejam

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

as funções definidas por

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Então $g \circ f$ tem por domínio o conjunto

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

e é definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Exemplo (continuação)

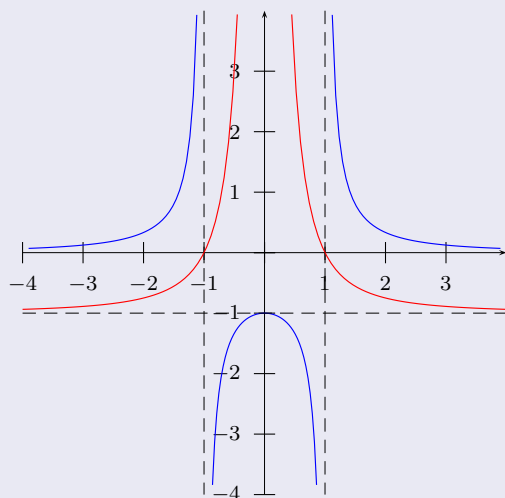
Se em vez de $g \circ f$ calcularmos $f \circ g$ temos

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \frac{1}{x^2} - 1.$$

Exemplo (continuação)



- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
 - O conjunto dos números reais
 - Definição e exemplos de funções; função inversa; composição de funções
 - **Função exponencial e função logarítmica**
 - Funções trigonométricas e suas inversas
 - Funções hiperbólicas
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Dado um número real positivo $a > 0$, pretendemos estudar a função

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = a^x,$$

que se designa por **função exponencial de base a** .

Repare-se que quando $a = 1$ temos a função constante

$$f(x) = 1^x = 1.$$

Propriedades da função exponencial

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $a, b \in]0, +\infty[$. Então

- a) $a^0 = 1$
- b) $a^{x+y} = a^x a^y$
- c) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- d) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- e) $(a^x)^y = a^{xy}$
- f) $a^x b^x = (ab)^x$
- g) se $x > y$ e $a > 1$, então $a^x > a^y$
- h) se $x > y$ e $0 < a < 1$, então $a^x < a^y$
- i) se $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ a função exponencial é injectiva
- j) se $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ o contradomínio da função exponencial é $]0, +\infty[$

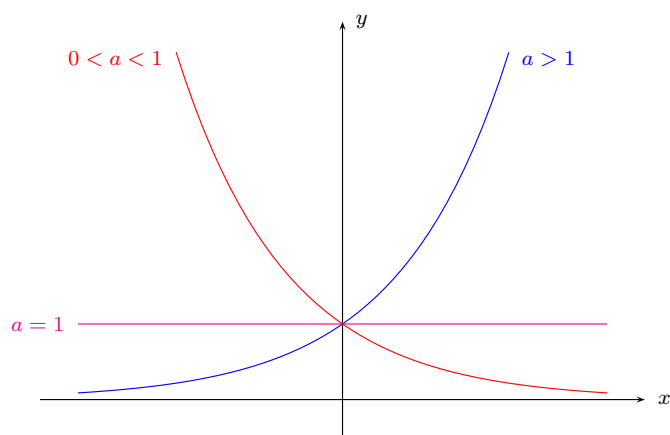


Gráfico da função exponencial

Quando $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, a função exponencial a^x é injectiva e, por conseguinte, tem inversa. Essa inversa chama-se **logaritmo na base a** e representa-se por \log_a .

Assim, tendo em conta que o contradomínio da função exponencial é o intervalo $]0, +\infty[$, temos que

$$\log_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

é a função definida por

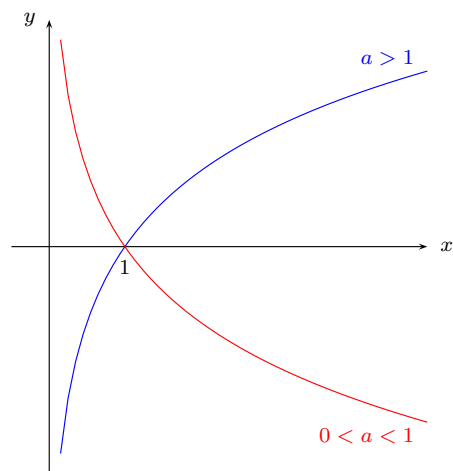
$$\log_a x = y \text{ se e só se } x = a^y.$$

Obviamente, quando $a = e$ temos a função **logaritmo natural** que representamos por \ln .

Propriedades da função logarítmica

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Então

- a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- b) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- c) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- d) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$
- e) $\log_a x = \log_b x \log_a b$
- f) $\log_a 1 = 0$
- g) se $x > y$ e $a > 1$, então $\log_a x > \log_a y$
- h) se $x > y$ e $0 < a < 1$, então $\log_a x < \log_a y$
- i) a função logarítmica é injectiva;
- j) o contradomínio da função logarítmica é \mathbb{R}

Gráfico da função logaritmo de base a

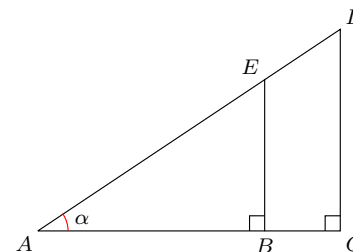
- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
 - O conjunto dos números reais
 - Definição e exemplos de funções; função inversa; composição de funções
 - Função exponencial e função logarítmica
 - Funções trigonométricas e suas inversas
 - Funções hiperbólicas

- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

- 4 Primitivas

- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}



$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

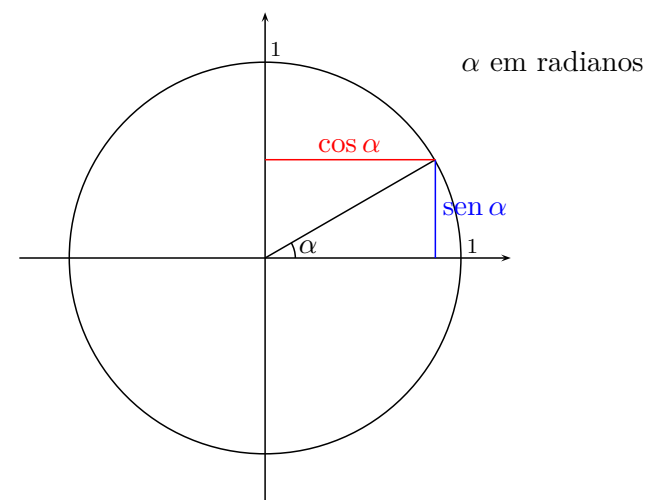
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

- seno:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{comprimento do cateto oposto}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

- cosseno:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$



As funções **seno** e **coseno**, cujo domínio é o conjunto dos números reais, fazem corresponder a cada $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} x,$$

respectivamente. O contradomínio destas duas funções é o intervalo $[-1, 1]$.

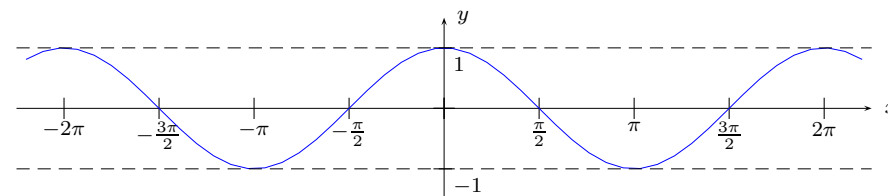


Gráfico da função coseno

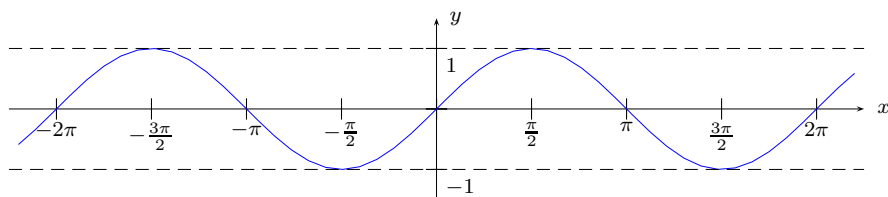


Gráfico da função seno

Outra função trigonométrica importante é a função **tangente**, definida pela fórmula

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x},$$

que está definida para todos os pontos x tais que $\operatorname{cos} x \neq 0$, ou seja, o domínio da função tangente é o conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

O seu contradomínio é o conjunto dos números reais.

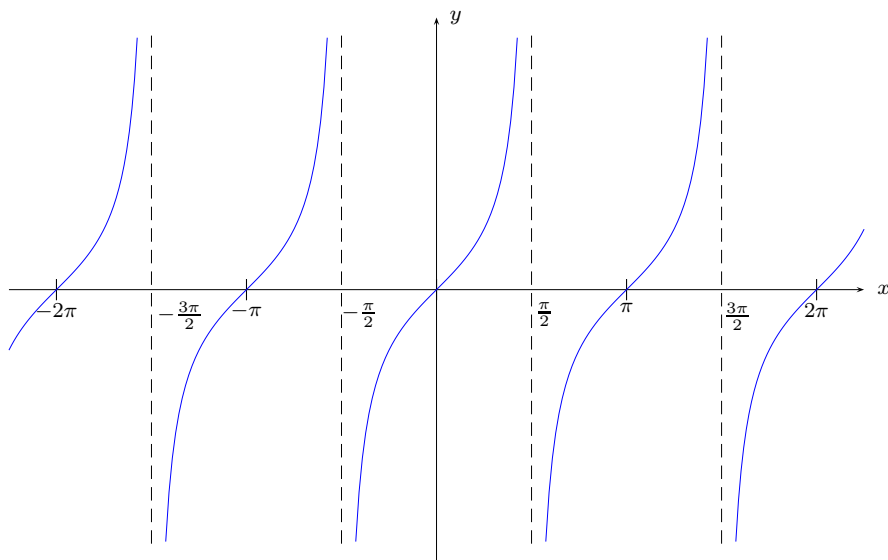


Gráfico da função tangente

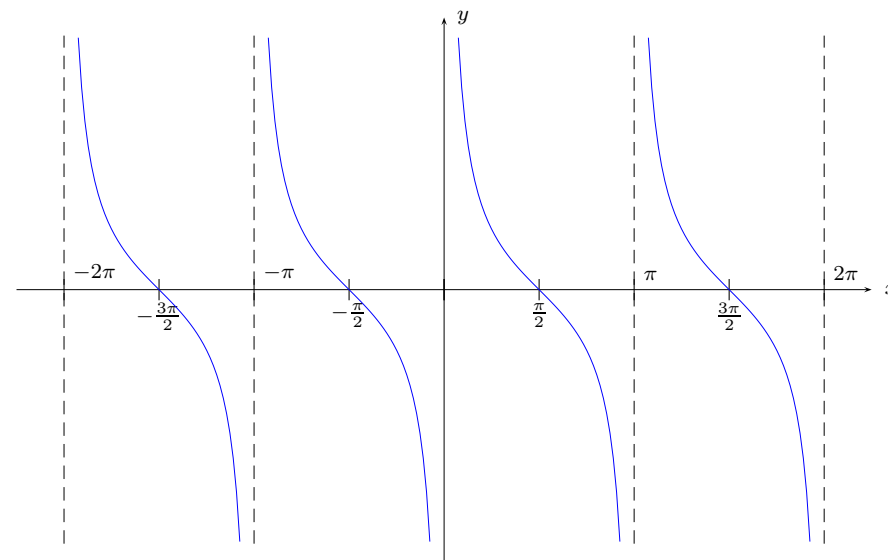


Gráfico da função cotangente

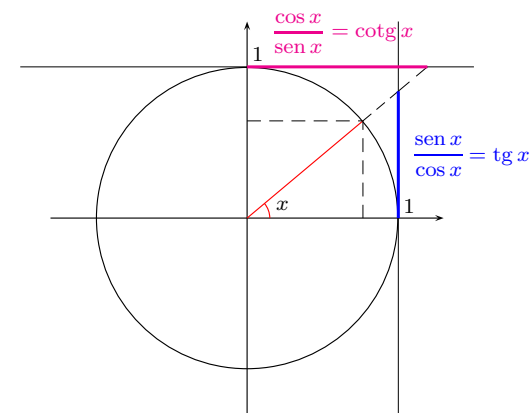
A função **cotangente** é dada pela expressão

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

O seu domínio é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

e o contradomínio é o conjunto dos números reais.



A função **secante** é definida por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

o seu domínio é o conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

e o seu contradomínio é o conjunto

$$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

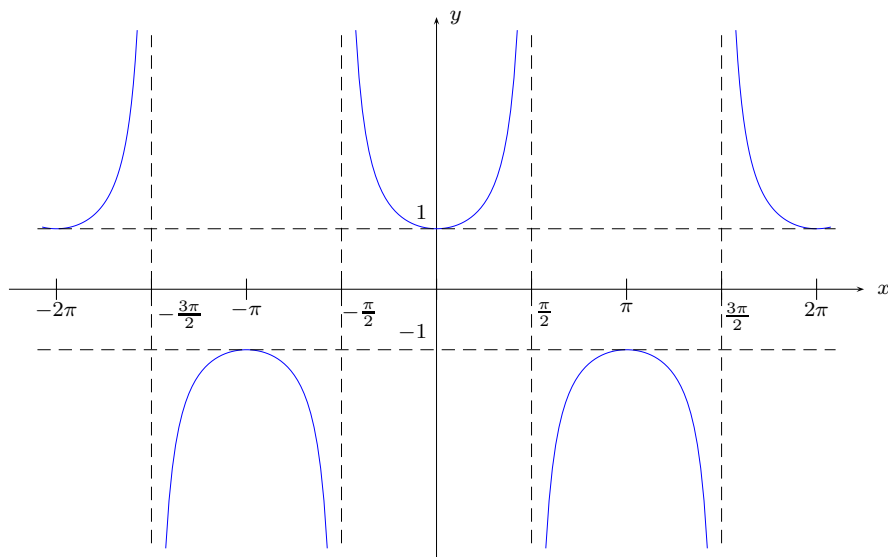


Gráfico da função secante

A função **cosecante** é definida por

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

o seu domínio é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

e o seu contradomínio é o conjunto

$$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

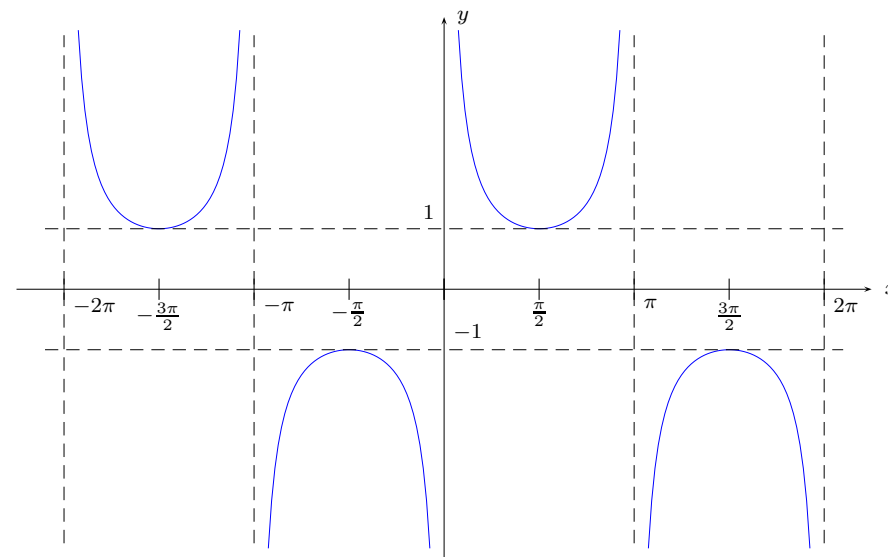


Gráfico da função cosecante

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.

Reduções ao primeiro quadrante

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(\pi/2 + x) = \cos x$$

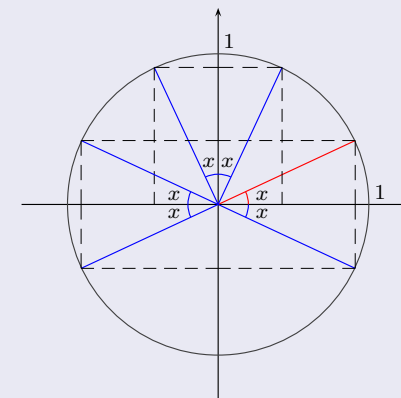
$$\cos(\pi/2 + x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$



Fórmula fundamental da trigonometria

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Desta fórmula resultam imediatamente as seguintes fórmulas

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

que podem ser reescritas da seguinte forma

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Reduções ao primeiro quadrante (continuação)

$$\operatorname{sen}(3\pi/2 - x) = -\cos x$$

$$\cos(3\pi/2 - x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(3\pi/2 + x) = -\cos x$$

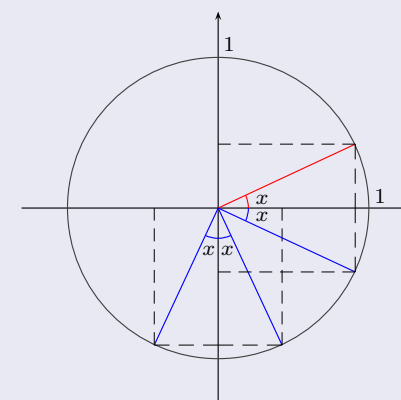
$$\cos(3\pi/2 + x) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x$$

$$\operatorname{sen}(2\pi + x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(2\pi + x) = \cos x$$



Reduções ao primeiro quadrante (continuação)

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$$

$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x)$$

$$\operatorname{tg}(\pi/2 - x) = \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{cotg}(\pi/2 - x) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}(\pi/2 + x) = -\operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{cotg}(\pi/2 + x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x$$

Resolução de equações trigonométricas

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{cos} x = \operatorname{cos} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} y \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} y \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{cos}(x + y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{cos}(x - y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{cos}(2x) = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{cos}^2 x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{cos} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \operatorname{cos} \frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} y = 2 \operatorname{cos} \frac{x+y}{2} \operatorname{cos} \frac{x-y}{2}$$

A função seno não é injectiva pelo que não tem inversa. No entanto, considerando a restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a que se chama **restrição principal**, ou seja, considerando a função

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

tem-se que a função f é injectiva. À inversa desta função chama-se **arco seno** e representa-se por arcsen . Assim,

$$\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

e é definida da seguinte forma

$$\operatorname{arcsen} x = y \text{ se e só se } x = \operatorname{sen} y \text{ e } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

x	$\arcsen x$
0	0
1	$\pi/2$
-1	$-\pi/2$
1/2	$\pi/6$
-1/2	$-\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

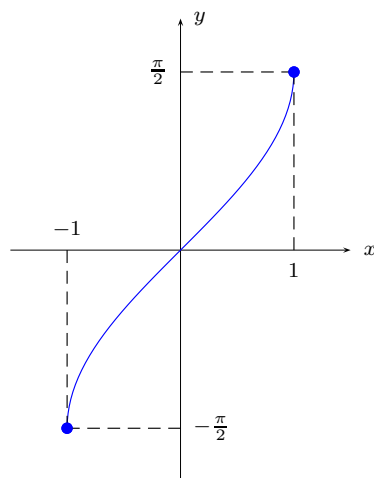


Gráfico da função arco seno

Considerando a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$, ou seja, a função $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ definida por $g(x) = \cos x$, tem-se que g é uma função injectiva. A inversa desta função representa-se por \arccos e chama-se **arco cosseno**. Assim,

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$\arccos x = y \text{ se e só se } x = \cos y \text{ e } y \in [0, \pi].$$

x	$\arccos x$
0	$\pi/2$
1	0
-1	π
1/2	$\pi/3$
-1/2	$2\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$

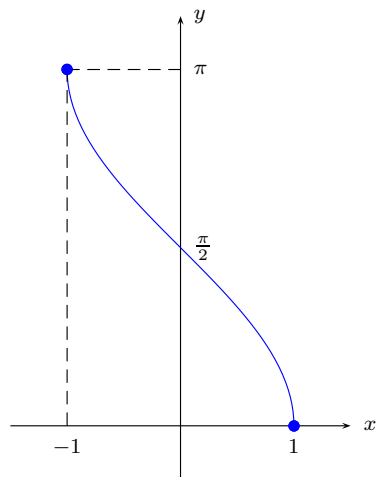


Gráfico da função arco coseno

x	$\arctg x$
0	0
1	$\frac{\pi}{4}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$

Seja

$$h : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

a função definida por

$$h(x) = \operatorname{tg} x.$$

A função h é injectiva, pelo que h tem inversa. A inversa desta função representa-se por \arctg e chama-se **arco tangente**. Assim

$$\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$\arctg x = y \text{ se e só se } x = \operatorname{tg} y \text{ e } y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

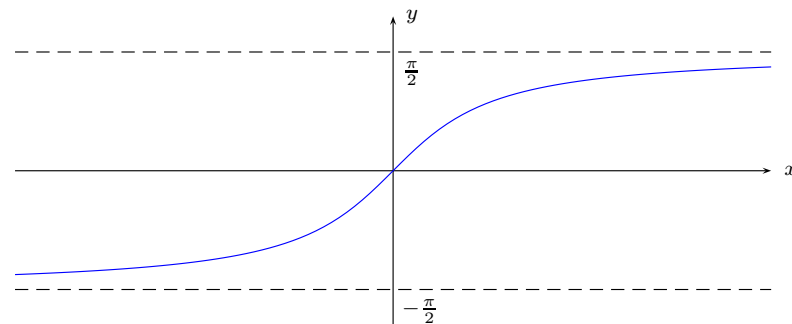


Gráfico da função arco tangente

À inversa da restrição ao intervalo $]0, \pi[$ da função cotangente chamamos **arco cotangente** e representamos essa função por $\operatorname{arccotg}$. Assim,

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$\operatorname{arccotg} x = y \text{ se e só se } x = \cotg y \text{ e } y \in]0, \pi[.$$

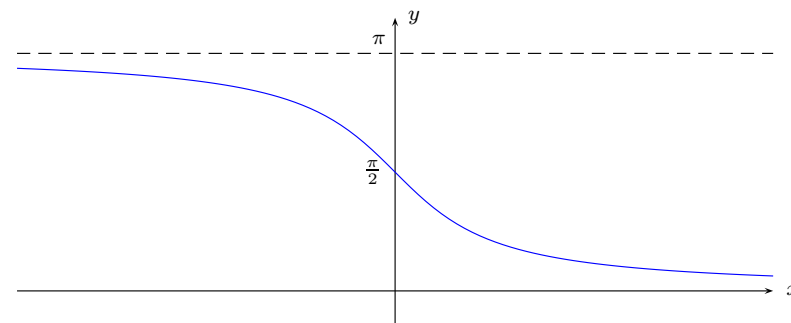


Gráfico da função arco cotangente

x	$\operatorname{arccotg} x$
0	$\frac{\pi}{2}$
1	$\frac{\pi}{4}$
-1	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$-\sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
 - O conjunto dos números reais
 - Definição e exemplos de funções; função inversa; composição de funções
 - Função exponencial e função logarítmica
 - Funções trigonométricas e suas inversas
 - Funções hiperbólicas
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

As funções

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

designam-se por **seno hiperbólico** e por **coseno hiperbólico**, respectivamente.

$$\begin{aligned} \sinh x = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \quad \vee \quad \cancel{e^x = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2}} \\ &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Logo o contradomínio do seno hiperbólico é \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \cosh x = y &\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \quad \vee \quad e^x = \frac{2y - \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \vee \quad e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \vee \quad x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \end{aligned}$$

Assim, o contradomínio do coseno hiperbólico é o intervalo $[1, +\infty[$.

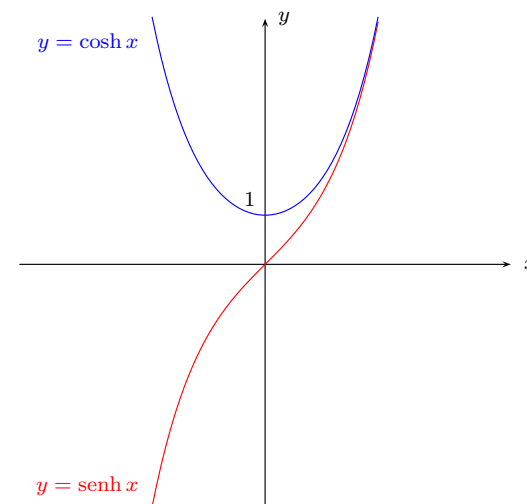


Gráfico das funções seno e coseno hiperbólico

Associada a estas funções está a função **tangente hiperbólica**. A tangente hiperbólica é a função

$$\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

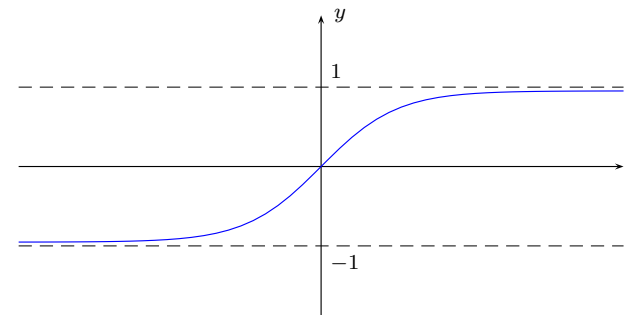


Gráfico da função tangente hiperbólica

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} x = y &\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y e^{2x} + y \\ &\Leftrightarrow (1 - y) e^{2x} = y + 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{y + 1}{1 - y} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y + 1}{1 - y} \right) \end{aligned}$$

Assim, temos de ter $\frac{y + 1}{1 - y} > 0$, o que é equivalente a $-1 < y < 1$. Logo o contradomínio da tangente hiperbólica é o intervalo $] -1, 1[$.

É fácil mostrar que as seguintes igualdades são válidas:

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

b) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

c) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

d) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

- Breves noções de topologia em \mathbb{R}
- Limites: definição, propriedades e exemplos
- Limites infinitos e limites no infinito
- Limites laterais
- Assíntotas
- Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
- Propriedades fundamentais das funções contínuas

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

- Breves noções de topologia em \mathbb{R}
- Limites: definição, propriedades e exemplos
- Limites infinitos e limites no infinito
- Limites laterais
- Assíntotas
- Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
- Propriedades fundamentais das funções contínuas

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Seja A um subconjunto de \mathbb{R} . Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se **interior** a A

se existir $\varepsilon > 0$ tal que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq A$.

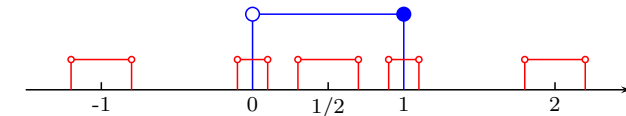
O ponto a diz-se **exterior** a A

se existir $\varepsilon > 0$ tal que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A = \emptyset$

(ou seja, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus A$).

Um ponto diz-se **fronteiro** a A se não for interior, nem exterior, isto é, a é um ponto fronteiro de A

se para cada $\varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ e $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$.



Seja A o conjunto $]0, 1]$. Então

$\frac{1}{2}$ é um ponto interior a A ,

2 é um ponto exterior a A ,

-1 é um ponto exterior a A ,

0 é um ponto fronteiro a A e

1 é um ponto fronteiro a A .

O conjunto dos pontos interiores a A designa-se por **interior** de A e representa-se por

$$\text{int } A \text{ ou } A^\circ,$$

o conjunto dos pontos exteriores a A chama-se **exterior** de A e representa-se por

$$\text{ext } A$$

e o conjunto dos pontos fronteiros a A diz-se a **fronteira** de A e representa-se por

$$\text{fr } A.$$

- a) Da definição resulta imediatamente que $\text{int } A$, $\text{ext } A$ e $\text{fr } A$ são conjuntos disjuntos dois a dois e que

$$\mathbb{R} = \text{int } A \cup \text{ext } A \cup \text{fr } A.$$

- b) Outra consequência imediata da definição é o seguinte

$$\text{ext } A = \text{int } (\mathbb{R} \setminus A) \quad \text{e} \quad \text{fr } A = \text{fr } (\mathbb{R} \setminus A).$$

Exemplos

- a) Para o intervalo $A =]0, 1]$ temos

$$\text{int } A =]0, 1[, \quad \text{ext } A =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad \text{e} \quad \text{fr } A = \{0, 1\}.$$

- b) Considerando o intervalo $I =]a, b[$, com $a < b$, verifica-se imediatamente que

$$\text{int } I =]a, b[, \quad \text{ext } I =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\quad \text{e} \quad \text{fr } I = \{a, b\}.$$

- c) Os intervalos $]a, b]$, $[a, b[$ e $[a, b]$, onde $a < b$, têm o mesmo interior, o mesmo exterior e a mesma fronteira que o intervalo $]a, b[$.

- d) $\text{int } \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\text{ext } \mathbb{R} = \emptyset$, $\text{fr } \mathbb{R} = \emptyset$.

- e) $\text{int } \emptyset = \emptyset$, $\text{ext } \emptyset = \mathbb{R}$, $\text{fr } \emptyset = \emptyset$.

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se **aderente** a um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

se para cada $\varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos aderentes de um conjunto A designa-se por **aderência** ou **fecho** de A e representa-se por

$$\overline{A}.$$

Das definições resulta que

$$\overline{A} = \text{int } A \cup \text{fr } A$$

e

$$\text{int } A \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Exemplos

a) Se $A =]0, 1[$, então $\overline{A} = [0, 1]$.

b) Dado $I = [a, b]$, com $a < b$, temos

$$\overline{I} = [a, b].$$

c) Os intervalos $]a, b[$, $[a, b[$ e $]a, b]$, onde $a < b$, têm a mesma aderência que o intervalo $[a, b]$.

d) Seja $A = [1, 2[\cup \{3, 4\}$. Então

$$\overline{A} = [1, 2] \cup \{3, 4\}.$$

e) Obviamente, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ e $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Exemplos

a) O derivado do intervalo $I = [a, b[$, com $a < b$, é o conjunto $I' = [a, b]$.

b) Os intervalos $]a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$, onde $a < b$, têm o mesmo derivado que o intervalo $[a, b[$.

c) Seja $A =]0, 2] \cup \{3\}$. Então

$$\text{int } A =]0, 2[$$

$$\text{ext } A =]-\infty, 0[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{fr } A = \{0, 2, 3\},$$

$$\overline{A} = [0, 2] \cup \{3\} \text{ e}$$

$$A' = [0, 2].$$

d) $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$ e $\emptyset' = \emptyset$.

Sejam A um subconjunto de \mathbb{R} e a um número real. Diz-se que a é um **ponto de acumulação** de A

$$\text{se para cada } \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto A representa-se por

$$A'$$

e designa-se por **derivado**. Os pontos de A que não são pontos de acumulação de A designam-se por **pontos isolados**.

Um subconjunto A de \mathbb{R} diz-se **aberto** se

$$A = \text{int } A$$

e diz-se **fechado** se

$$A = \overline{A}.$$

Exemplos

a) Como

$$\text{int }]0, 1[=]0, 1[,$$

temos que $]0, 1[$ é um conjunto aberto. Por outro lado,

$$\overline{]0, 1[} = [0, 1]$$

e, por conseguinte, $]0, 1[$ não é fechado.

b) O intervalo $[0, 1]$ é um conjunto fechado porque

$$\overline{[0, 1]} = [0, 1]$$

e não é um conjunto aberto porque

$$\text{int } [0, 1] =]0, 1[.$$

c) Os conjuntos \emptyset e \mathbb{R} são simultaneamente abertos e fechados.

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

- Breves noções de topologia em \mathbb{R}
- Limites: definição, propriedades e exemplos
- Limites infinitos e limites no infinito
- Limites laterais
- Assíntotas
- Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
- Propriedades fundamentais das funções contínuas

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, a um ponto de acumulação de D e $b \in \mathbb{R}$. Diz-se que b é o **limite (de f) quando x tende para a** , e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Simbolicamente, tem-se o seguinte

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Tendo em conta que

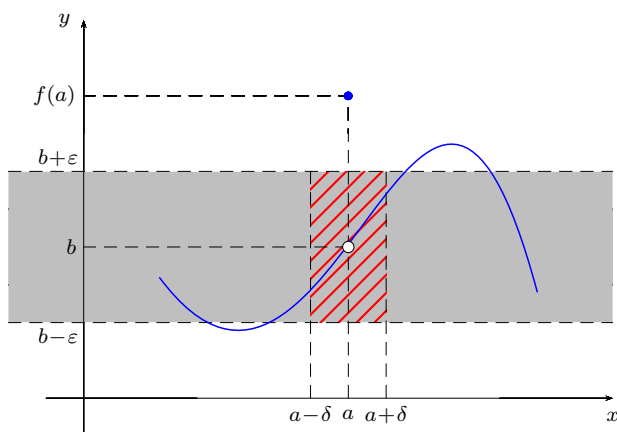
$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$$

e que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[,$$

tem-se o seguinte

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[). \end{aligned}$$



Interpretação geométrica do conceito de limite de uma função

Propriedades dos limites (continuação)

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D . Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

e que g é uma função limitada em $D \cap]a - \delta, a + \delta[$ para algum $\delta > 0$, isto é, existe $c > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq c \text{ para qualquer } x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D.$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Propriedades dos limites

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D . Suponhamos que existem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Então

a) existe $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

b) existe $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right];$$

c) se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Propriedades dos limites (continuação)

Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real. Suponhamos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D_f e que $b \in D_g$ é um ponto de acumulação de D_g . Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = g(b),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b).$$

Um dos limites mais conhecidos é o seguinte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

A partir deste limite podemos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. Fazendo a mudança de variável $\ln(1+x) = y$, tem-se $x = e^y - 1$ e quando $x \rightarrow 0$ tem-se $y \rightarrow 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Outro limite bastante importante é o seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Usando este limite podemos calcular vários outros limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1.$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Vejamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

De facto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \frac{1}{(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{(1 + \cos x)} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Provemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1.$$

No primeiro limite fazemos a mudança de variável $\arcsin x = y$ e obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Para o segundo limite fazemos a mudança de variável $y = \arctg x$ e vem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

- Breves noções de topologia em \mathbb{R}
- Limites: definição, propriedades e exemplos
- Limites infinitos e limites no infinito
- Limites laterais
- Assíntotas
- Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
- Propriedades fundamentais das funções contínuas

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

§2.3 Limites infinitos e limites no infinito

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} não majorado, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$. Dizemos que

f tende para b quando x tende para $+\infty$,

e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b,$$

se para cada $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x > M.$$

Simbolicamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Quando D é subconjunto de \mathbb{R} não minorado, diz-se que

f tende para b quando x tende para $-\infty$,

e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b,$$

se para cada $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x < -M,$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

§2.3 Limites infinitos e limites no infinito

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D . Diz-se que

f tende para $+\infty$ quando x tende para a ,

e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

se para cada $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Simbolicamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > L).$$

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D . Diz-se que

f tende para $-\infty$ quando x tende para a ,

e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

se para cada $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < -L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Simbolicamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -L).$$

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} não majorado e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que

f tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$,

e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

se para cada $L > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$f(x) > L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x > M.$$

Formalmente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x > M \Rightarrow f(x) > L).$$

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} não majorado e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que

f tende para $+\infty$ quando x tende para $-\infty$,

e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

se para cada $L > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$f(x) > L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x < -M.$$

Formalmente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x < -M \Rightarrow f(x) > L).$$

Se D é um subconjunto de \mathbb{R} não minorado, dizemos que

f tende para $+\infty$ quando x tende para $-\infty$,

e usa-se a notação

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

se para cada $L > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$f(x) > L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x < -M,$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x < -M \Rightarrow f(x) > L).$$

Se D é um subconjunto de \mathbb{R} não minorado, dizemos que

f **tende para $-\infty$ quando x tende para $-\infty$** ,

e usa-se a notação

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

se para cada $L > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$f(x) < -L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x < -M,$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x < -M \Rightarrow f(x) < -L).$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > L).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -L).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x > M \Rightarrow f(x) > L).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x > M \Rightarrow f(x) < -L).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x < -M \Rightarrow f(x) > L).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists M > 0 \forall x \in D (x < -M \Rightarrow f(x) < -L).$$

Nos limites infinitos podemos usar a regra do limite da soma desde que se adoptem as convenções

$$(+\infty) + a = +\infty = a + (+\infty)$$

$$(-\infty) + a = -\infty = a + (-\infty)$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

onde a é um número real qualquer.

Adoptando as convenções que se seguem, podemos usar a regra do limite do produto:

$$(+\infty) \times a = +\infty = a \times (+\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^+$$

$$(-\infty) \times a = -\infty = a \times (-\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^+$$

$$(+\infty) \times a = -\infty = a \times (+\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^-$$

$$(-\infty) \times a = +\infty = a \times (-\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^-$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty = (-\infty) \times (-\infty)$$

$$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty = (-\infty) \times (+\infty)$$

A regra do limite do quociente mantém-se se se adoptarem as seguintes convenções

$$\begin{aligned}\frac{a}{+\infty} &= \frac{a}{-\infty} = 0, & a \in \mathbb{R} \\ \frac{a}{0^+} &= +\infty, & a > 0 \\ \frac{a}{0^+} &= -\infty, & a < 0 \\ \frac{a}{0^-} &= -\infty, & a > 0 \\ \frac{a}{0^-} &= +\infty, & a < 0\end{aligned}$$

onde 0^+ significa que

$f(x) \rightarrow 0$ e $f(x) > 0$ na intersecção do domínio com um intervalo aberto que contém o ponto em que estamos a calcular o limite

e 0^- significa que

$f(x) \rightarrow 0$ e $f(x) < 0$ na intersecção do domínio com um intervalo aberto que contém o ponto em que estamos a calcular o limite.

Não se faz nenhuma convenção para os símbolos

$$(+\infty) + (-\infty),$$

$$0 \times (+\infty), \quad 0 \times (-\infty),$$

$$\begin{aligned}\frac{+\infty}{+\infty}, & \quad \frac{+\infty}{-\infty}, & \quad \frac{-\infty}{+\infty}, & \quad \frac{-\infty}{-\infty} \\ & & & \quad \frac{0}{0}\end{aligned}$$

pois são símbolos de indeterminação.

Exemplos

a) É óbvio que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

b) Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

e

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Exemplos (continuação)

c) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2x+1} & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{-2x^2+3}{3x^2+8} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2+3}{3x^2+8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(-2 + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{8}{x^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Vejamos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Começemos por observar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

e que fazendo a mudança de variável $y = 1/x$ temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln[(1+\frac{1}{x})^x]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[(1+\frac{1}{x})^x]} = e^1 = e.$$

Outros limites importantes são os seguintes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

Destes limites resulta que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

- Breves noções de topologia em \mathbb{R}
- Limites: definição, propriedades e exemplos
- Limites infinitos e limites no infinito
- Limites laterais
- Assíntotas
- Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
- Propriedades fundamentais das funções contínuas

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Sejam A um subconjunto de $D \subseteq \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de A e

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Chama-se **limite de f no ponto a relativo a A** (ou **limite quando x tende para a no conjunto A**) ao limite em a (quando exista) da restrição de f a A e usa-se a notação

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x).$$

É evidente que se existe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

então também existe

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$$

para qualquer subconjunto A de D do qual a é ponto de acumulação de A e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Assim, se existirem dois limites relativos distintos, o limite não existe.

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x) = 0$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Logo não existe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e consideremos os conjuntos

$$D_a^+ = \{x \in D : x > a\} = D \cap]a, +\infty[$$

e

$$D_a^- = \{x \in D : x < a\} = D \cap]-\infty, a[.$$

Definem-se, respectivamente, os **limites laterais à direita** e **à esquerda** da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D_a^+}} f(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D_a^-}} f(x),$$

desde que a seja ponto de acumulação de D_a^+ e de D_a^- , respectivamente.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esta função é conhecida por **função de Heaviside**. É óbvio que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in]0, +\infty[}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in]-\infty, 0[}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

Observações

a) É óbvio que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ é equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

b) Como

$$x \in D_a^- \text{ e } 0 < |x - a| < \delta$$

é equivalente a

$$x \in D \text{ e } -\delta < x - a < 0$$

e, portanto, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ é equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Analogamente, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ é equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ (0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Também se tem

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -L)$$

caso a seja um ponto da acumulação de D_a^- e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < -L)$$

quando a é um ponto de acumulação de D_a^+ .

Também existem limites laterais para limites infinitos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > L)$$

caso a seja um ponto da acumulação de D_a^- e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > L)$$

quando a é um ponto de acumulação de D_a^+ .

Propriedade dos limites laterais

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D_a^+ e D_a^- . Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

onde $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ ou $b = -\infty$, se e só se existem e são iguais a b os limites laterais, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$$

Exemplos

a) É evidente que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

b) Também se tem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

De

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

conclui-se imediatamente que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Vejamos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

De facto,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

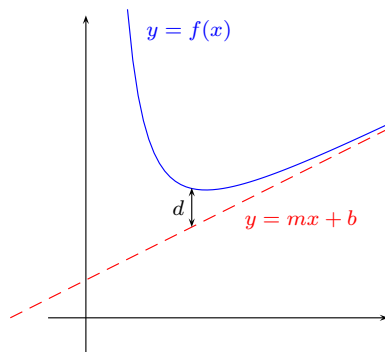
e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

De forma análoga temos

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
 - Breves noções de topologia em \mathbb{R}
 - Limites: definição, propriedades e exemplos
 - Limites infinitos e limites no infinito
 - Limites laterais
 - Assíntotas
 - Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
 - Propriedades fundamentais das funções contínuas
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}



$$d = f(x) - (mx + b)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Sejam D um subconjunto não majorado e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A recta de equação $y = mx + b$ diz-se uma **assíntota não vertical à direita do gráfico de f** se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Se D é um subconjunto não minorado e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, diz-se que a recta de equação $y = mx + b$ é uma **assíntota não vertical à esquerda do gráfico de f** se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Assíntotas não verticais à direita

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} não majorado e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Para que o gráfico de f tenha uma assíntota não vertical à direita é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
(que designaremos por m),
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$.

Verificadas estas condições, e designando por b o segundo limite, assíntota à direita do gráfico de f tem a equação

$$y = mx + b.$$

Assíntotas não verticais à esquerda

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} não minorado e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Para que o gráfico de f tenha uma assíntota não vertical à esquerda é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
(que designaremos por m),
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$.

Verificadas estas condições, e designando por b o segundo limite, assíntota à esquerda do gráfico de f tem a equação

$$y = mx + b.$$

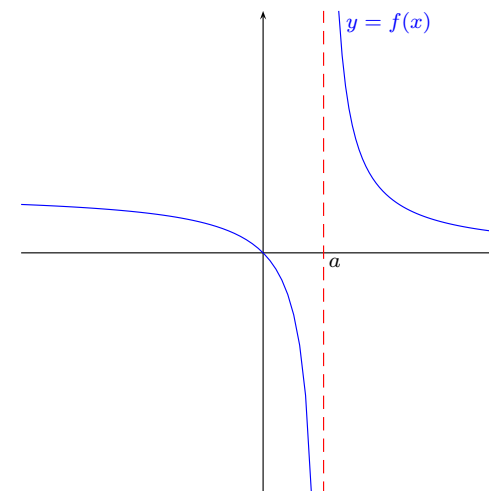
Assim, para calcularmos uma assíntota não vertical à direita temos de calcular os seguintes limites

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

e se estes limites existirem e forem finitos, a assíntota é a recta de equação $y = mx + b$. Para as assíntotas não verticais à esquerda temos de calcular os limites

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$$

e caso existam e sejam finitos ambos os limites, a assíntota é a recta de equação $y = mx + b$.



A recta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f

Diz-se que a recta de equação $x = a$ é uma **assíntota vertical ao gráfico de f** se pelo menos umas das seguintes condições se verificar:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
 - Breves noções de topologia em \mathbb{R}
 - Limites: definição, propriedades e exemplos
 - Limites infinitos e limites no infinito
 - Limites laterais
 - Assíntotas
 - Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
 - Propriedades fundamentais das funções contínuas
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Sejam D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$. Diz-se que f é **contínua no ponto a** se para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } |x - a| < \delta.$$

Simbolicamente,

f é contínua em a

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Dizemos que $a \in D$ é um **ponto de descontinuidade** de f se f não é contínua em a .

Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua** se for contínua em todos os pontos de D .

Observações

- a) Ao contrário do que acontece na definição de limite, só faz sentido considerar pontos do domínio D quando estamos a investigar a continuidade de uma função.
- b) Se a é um ponto isolado de D , então a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a . De facto, dado $\varepsilon > 0$, basta escolher $\delta > 0$ tal que

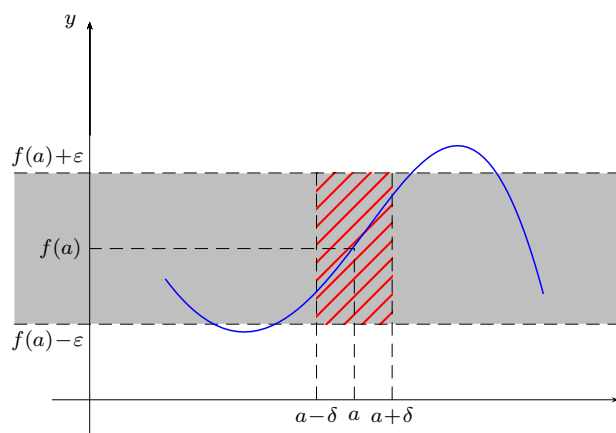
$$]a - \delta, a + \delta[\cap D = \{a\}.$$

Assim, a condição $x \in D \wedge |x - a| < \delta$ é equivalente a $x = a$ e, por conseguinte,

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

- c) Se $a \in D$ é um ponto de acumulação de D , então $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a se e só se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



Interpretação geométrica do conceito de função contínua num ponto

Propriedades da continuidade

- a) Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in D$. Então

$f + g$, $f - g$ e fg são contínuas em a

e se $g(a) \neq 0$ então

$\frac{f}{g}$ é contínua em a .

- b) Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções. Se f é contínua em $a \in D_f$ e g é contínua em $f(a) \in D_g$, então

$g \circ f$ é contínua em a .

Exemplos

- a) As funções **constante** são contínuas.
- b) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é contínua. Esta função designa-se por **identidade**.
- c) As funções **polinomiais**, ou seja, as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, são funções contínuas.

- d) As funções dadas por

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$, são funções contínuas. A estas funções chama-se funções **racionais**.

Exemplos (continuação)

- k) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

não é contínua em $x = 0$ porque não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Obviamente, a função é contínua em para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- l) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Então f não é contínua em $x = 0$ porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0.$$

É claro que a função é contínua em para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemplos (continuação)

- e) A função $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

é contínua.

- f) As funções exponencial e logarítmica são funções contínuas.
- g) As funções trigonométricas são funções contínuas.
- h) As inversas das funções trigonométricas são funções contínuas.
- i) As funções hiperbólicas são funções contínuas.
- j) A função definida por

$$f(x) = \sin \left(e^{x^2-x} + \frac{\ln(x-2)}{\arctg(x-5)} \right)$$

é uma função contínua pois é a composição de funções contínuas.

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que a função f é **contínua em a à direita** se

a restrição de f a $D \cap [a, +\infty[$ é contínua em a .

A função diz-se **contínua em a à esquerda** se

a restrição de f a $D \cap]-\infty, a]$ é contínua em a .

Assim, f é contínua à direita em a se e só se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 \leq x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

e é contínua à esquerda em a se e só se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (-\delta < x - a \leq 0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Obviamente, se a é um ponto de acumulação de $D \cap]a, +\infty[$, então

$$f \text{ é contínua à direita em } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

e caso a seja um ponto de acumulação de $D \cap]-\infty, a[$ temos

$$f \text{ é contínua à esquerda em } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

Propriedade

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D$. Então f é contínua em a se e só se é contínua à esquerda e à direita em a .

Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua tal que

$$f(a) \neq f(b).$$

Então para qualquer valor k entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = k.$$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

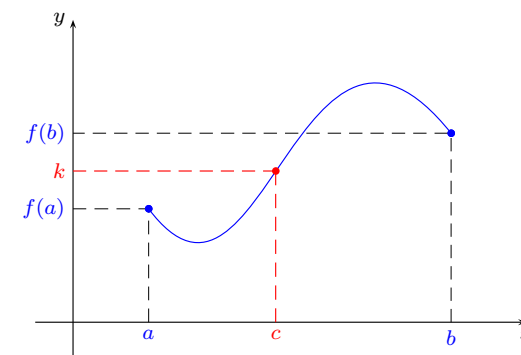
2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

- Breves noções de topologia em \mathbb{R}
- Limites: definição, propriedades e exemplos
- Limites infinitos e limites no infinito
- Limites laterais
- Assíntotas
- Funções contínuas: definição, propriedades e exemplos
- Propriedades fundamentais das funções contínuas

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

5 Cálculo integral em \mathbb{R}



Interpretação geométrica do Teorema de Bolzano

Corolário dos valores intermédios ou de Bolzano

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e seja

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua tal que

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Então existe

$$c \in]a, b[$$

tal que

$$f(c) = 0.$$

Exemplos

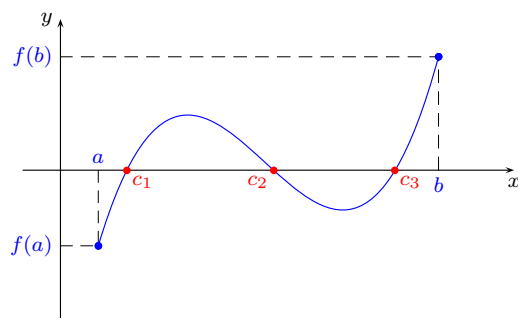
Provemos que a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x^2$$

tem (pelo menos) um zero em $[0, 1]$. Obviamente, esta função é contínua pois é a composição de funções contínuas. Como

$$f(0)f(1) = (\cos(0) - 0^2) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1^2\right) = 1(-1) = -1,$$

pelo (Corolário do) Teorema de Bolzano, f tem de ter pelo menos um zero no intervalo $]0, 1[$.



Interpretação geométrica do Corolário do Teorema de Bolzano

Exemplos (continuação)

Consideremos uma função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$a_n \neq 0$, de grau ímpar, ou seja, n é um número natural ímpar. Como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a_n > 0, \\ +\infty & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

existem números reais a e b tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. A continuidade de p implica, pelo Teorema de Bolzano, que p tem de ter um zero entre a e b . Assim, todos os polinómios de grau ímpar têm pelo menos um zero (real)!

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num subconjunto não vazio D .

Dizemos que f tem um **máximo (absoluto)** no ponto $a \in D$ ou que $f(a)$ é um **máximo (absoluto)** de f se

$$f(x) \leq f(a) \text{ para todo } x \in D.$$

Quando

$$f(x) \geq f(a) \text{ para todo } x \in D,$$

dizemos que f tem um **mínimo (absoluto)** no ponto $a \in D$ ou que $f(a)$ é um **mínimo (absoluto)** de f .

Os máximos e mínimos (absolutos) de f dizem-se **extremos absolutos** de f .

Teorema de Weierstrass

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, fechado e limitado e

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo absolutos.

Corolário

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo absolutos.

Exemplo

Seja $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \in [1, 3], \\ \frac{e^{2x-6} - 1}{x - 3} & \text{se } x \in]3, 5]. \end{cases}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 1 = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{e^{2x-6} - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{e^{2(x-3)} - 1}{2(x-3)} 2 = 1.2 = 2,$$

temos $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 = f(3)$. Assim, f é contínua no ponto $x = 3$. Além disso, em $[1, 5] \setminus \{3\}$ a função é contínua pois é a composição de funções contínuas. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo absolutos em $[1, 5]$.

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 **Cálculo diferencial em \mathbb{R}**
 - Derivadas: definição, regras de derivação e exemplos
 - Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy
 - Derivadas de ordem superior e fórmula de Taylor
 - Aplicações do cálculo diferencial
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
 - Derivadas: definição, regras de derivação e exemplos
 - Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy
 - Derivadas de ordem superior e fórmula de Taylor
 - Aplicações do cálculo diferencial
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Diz-se que a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é **derivável** ou **diferenciável** em D se for derivável em todo o ponto de D e à nova função

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R},$$

que a cada ponto $x \in D$ faz corresponder $f'(x)$, chama-se **derivada** de f e representa-se também por Df ou $\frac{df}{dx}$.

§3.1 Derivadas: definição, regras de derivação e exemplos

Sejam D um subconjunto não vazio de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D$ um ponto de acumulação de D . Diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** em a se existe (e é finito) o limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tal limite (quando existe) diz-se a **derivada de f no ponto a** e representa-se por $f'(a)$, $Df(a)$ ou ainda por $\frac{df}{dx}(a)$. Fazendo a mudança de variável $x = a + h$, temos

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Aqui têm apenas de se considerar os valores de h tais que $a + h \in D$.

§3.1 Derivadas: definição, regras de derivação e exemplos

O quociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

representa o declive da recta que passa pelos pontos

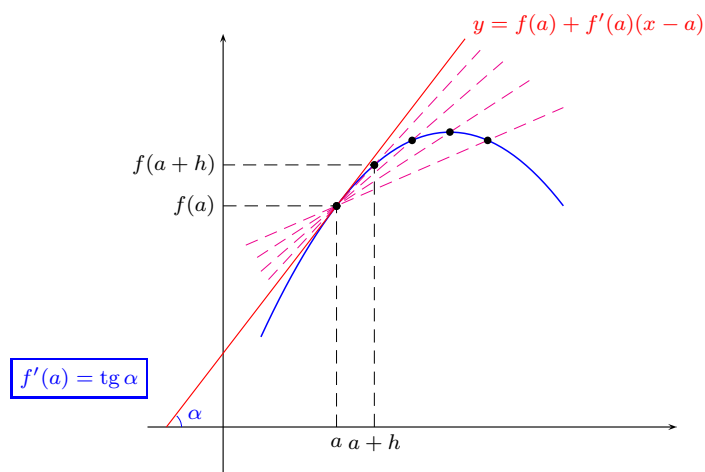
$$(a, f(a)) \text{ e } (a+h, f(a+h)).$$

Fazendo h tender para zero, a recta que passa nos pontos

$$(a, f(a)) \text{ e } (a+h, f(a+h)),$$

vai tender para a recta tangente ao gráfico de f e que passa no pontos $(a, f(a))$. Assim, geometricamente, a derivada de uma função num ponto do domínio é o declive da recta tangente ao gráfico da função no ponto considerado. Portanto, a recta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$ é a recta de equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$



Interpretação geométrica do conceito de derivada

Exemplos – funções constante

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = c,$$

onde c é um número real. Então

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Assim, f' é a função identicamente nula.

Exemplos – função identidade

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x.$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

e, portanto, $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) = 1.$$

Exemplos – função exponencial

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = e^x.$$

Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Exemplos – função logaritmo natural

Seja $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \ln x$. Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Exemplos

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ é derivável para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De facto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h/2}{h/2} \cos \frac{2x+h}{2} \\ &= \cos x, \end{aligned}$$

o que mostra que $(\sin x)' = \cos x$.

Exemplos

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin \frac{2x+h}{2} \frac{\sin h/2}{h/2} \\ &= -\sin x, \end{aligned}$$

temos que $(\cos x)' = -\sin x$.

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D$ tal que a é ponto de acumulação de

$$D_a^- = \{x \in D : x < a\} = D \cap]-\infty, a[.$$

Diz-se que f é **derivável (ou diferenciável) à esquerda em a** se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_e(a).$$

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D$ é um ponto de acumulação de

$$D_a^+ = \{x \in D : x > a\} = D \cap]a, +\infty[,$$

então diz-se que f é **derivável (ou diferenciável) à direita em a** se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_d(a).$$

Tendo em conta as propriedades dos limites, resulta imediatamente, para pontos $a \in D$ que são pontos de acumulação de D_a^- e de D_a^+ , que f é derivável em a se e só se f é derivável à esquerda e à direita em a e

$$f'_e(a) = f'_d(a).$$

Exemplos

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função não é diferenciável à direita, nem à esquerda do ponto 0, pois não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

nem

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = |x|.$$

Então

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x}{x} = -1$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

o que mostra que f não é derivável no ponto 0.

Propriedades

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in D$, então f é contínua nesse ponto.

Observação

O recíproco desta propriedade é falso. A função

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = |x|$$

é contínua no ponto 0, mas não é derivável nesse ponto.

Regras de derivação

Sejam $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in D$ e $k \in \mathbb{R}$. Então

i) $f + g$ é derivável em a e

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

ii) kf é derivável em a e

$$(kf)'(a) = kf'(a);$$

iii) $f \cdot g$ é derivável em a e

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a);$$

iv) se $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}.$$

Demonstração das regras de derivação

i) Basta observar que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \\ &= f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

ii) Basta ter em conta que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(kf)(x) - (kf)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} k \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= k f'(a). \end{aligned}$$

Demonstração das regras de derivação (continuação)

iii) Basta atender a que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado o facto de g ser contínua em a .

Demonstração das regras de derivação (continuação).

iv) Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(a) - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}. \end{aligned}$$

Na última igualdade usou-se o facto de g ser contínua em a . \square

Exemplos – funções polinomiais

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^n$$

derivável em todos os pontos de \mathbb{R} e

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Usando esta última igualdade, tem-se que a derivada da função definida por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é dada por

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Exemplos – cotangente

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned} (\cotg x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\ &= \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - (\cos x) \cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\ &= -\operatorname{cosec}^2 x. \end{aligned}$$

Exemplos – tangente

A derivada da tangente pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\tg x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x. \end{aligned}$$

Exemplos – seno e coseno hiperbólicos

Atendendo a que

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x} \right)' = \frac{1' e^x - (e^x)' 1}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x},$$

tem-se

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

e

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Derivada da função composta

Sejam D_f e D_g dois subconjuntos não vazios de \mathbb{R} e

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$$

funções tais que

$$f(D_f) \subseteq D_g.$$

Suponhamos que $a \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f e $b = f(a)$ é um ponto de acumulação de D_g . Se f é derivável em a e g é derivável em b , então $g \circ f$ é derivável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a) = g'(b) f'(a).$$

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = (2x^2 + 5)^{100}$. Então, usando a derivada da função composta, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 100 (2x^2 + 5)^{99} (2x^2 + 5)' \\ &= 100 (2x^2 + 5)^{99} 4x \\ &= 400x (2x^2 + 5)^{99}. \end{aligned}$$

Consideremos a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sin(e^x + 1)$. A sua derivada é dada por

$$g'(x) = \cos(e^x + 1) (e^x + 1)' = \cos(e^x + 1) e^x = e^x \cos(e^x + 1).$$

Exemplos

A função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = e^{3 \cos x^2}$ tem derivada em todos os pontos de \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{3 \cos x^2} (3 \cos x^2)' \\ &= e^{3 \cos x^2} (-3 \sin x^2) (x^2)' \\ &= e^{3 \cos x^2} (-3 \sin x^2) 2x \\ &= -6x \sin x^2 e^{3 \cos x^2}. \end{aligned}$$

Exemplos – função exponencial e função logarítmica

Para a função exponencial temos

$$(a^x)' = (e^{\ln(a^x)})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Para a função logarítmica usando a igualdade

$$\log_e x = \log_a x \log_e a$$

temos

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1/x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Exemplos

Se f é uma função real de variável real diferenciável, então

$$\left[e^{f(x)} \right]' = f'(x) e^{f(x)},$$

$$[\sin(f(x))]' = f'(x) \cos(f(x))$$

e

$$[\cos(f(x))]' = -f'(x) \sin(f(x)).$$

Exemplos – raízes

A função $g :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ definida por

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

é a função inversa da função $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ definida por

$$f(y) = y^n.$$

Como $f'(y) = ny^{n-1} \neq 0$ para qualquer $y \in]0, +\infty[$ temos, fazendo $y = g(x)$,

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Derivada da função inversa

Sejam f uma função diferenciável e injectiva definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Se

$$f'(a) \neq 0,$$

então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Exemplos – logaritmo natural

Do mesmo modo, a função $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \ln x$$

é a inversa da função $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ definida por

$$f(y) = e^y.$$

Como $f'(y) = e^y \neq 0$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$ e $y = \ln x$ temos

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Exemplos – arco seno

Consideremos a função $g : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ definida por

$$g(x) = \arcsen x.$$

A função g é a função inversa da função $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ dada por

$$f(y) = \sen y.$$

Além disso, $f'(y) = \cos y \neq 0$ para $y \in]-\pi/2, \pi/2[$. Assim, escrevendo $y = \arcsen x$, ou seja, $x = \sen y$, temos

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(\sen y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Tendo em conta que $\sen^2 y + \cos^2 y = 1$ e que $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, obtemos $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ e, por conseguinte, para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ temos

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ a função não tem derivada lateral à direita, nem derivada lateral à esquerda, respectivamente.

Exemplos – arco coseno

A função $g : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ definida por

$$g(x) = \arccos x$$

é a inversa da função $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$f(y) = \cos y.$$

Atendendo a que $f'(y) = -\sen y \neq 0$ para cada $y \in]0, \pi[$ vem

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sen y}$$

e, como $\sen^2 y + \cos^2 y = 1$ e $y \in]0, \pi[$, temos $\sen y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ o que implica

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exemplos – arco tangente

A função $g :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \arctg x$$

é a inversa da função $f : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ definida por

$$g(y) = \tg y.$$

Como $g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$ para $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ temos

$$(\arctg x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Exemplos – arco cotangente

Do mesmo modo tem-se

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Tabela de derivadas

$[\alpha u(x)]' = \alpha u'(x), \alpha \in \mathbb{R}$	$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$
$[u(x) v(x)]' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$	$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) v(x) - u(x) v'(x)}{[v(x)]^2}$
$[(u(x))^\alpha]' = \alpha u'(x) [u(x)]^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$	$[\sqrt{u(x)}]' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$[e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$	$[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$[a^{u(x)}]' = u'(x) a^{u(x)} \ln a$	$[\log_a(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$

Tabela de derivadas (continuação)

$[\sin(u(x))]' = u'(x) \cos[u(x)]$	$[\cos(u(x))]' = -u'(x) \sin[u(x)]$
$[\operatorname{tg}(u(x))]' = \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}$	$[\operatorname{cotg}(u(x))]' = -\frac{u'(x)}{\sin^2[u(x)]}$
$[\operatorname{arc\,sen}(u(x))]' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$	$[\operatorname{arc\,cos}(u(x))]' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$
$[\operatorname{arctg}(u(x))]' = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$	$[\operatorname{arc\,cotg}(u(x))]' = -\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$
$[\sinh(u(x))]' = u'(x) \cosh[u(x)]$	$[\cosh(u(x))]' = u'(x) \sinh[u(x)]$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 **Cálculo diferencial em \mathbb{R}**
 - Derivadas: definição, regras de derivação e exemplos
 - Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy
 - Derivadas de ordem superior e fórmula de Taylor
 - Aplicações do cálculo diferencial
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Teorema de Rolle

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e seja

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se

$$f(a) = f(b),$$

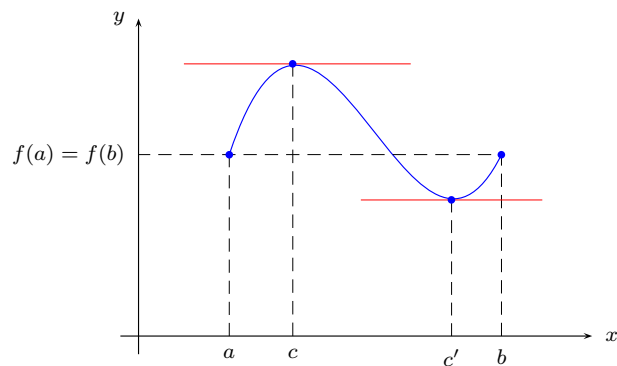
então existe

$$c \in]a, b[$$

tal que

$$f'(c) = 0.$$

A interpretação geométrica de $f'(c) = 0$ corresponde a que a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é horizontal. Tendo isto em conta, podemos interpretar geometricamente o Teorema de Rolle da seguinte forma.



Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

Corolários do Teorema de Rolle

Sejam I um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em I . Então

- 1) entre dois zeros de f existe pelo menos um zero da derivada;
- 2) entre dois zeros consecutivos da derivada de f , existe quando muito um zero da função.

Teorema do valor médio de Lagrange

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então existe

$$c \in]a, b[$$

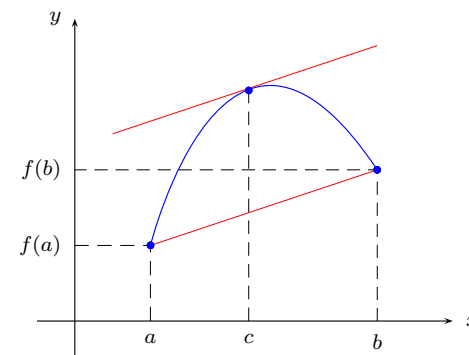
tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ou seja,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Geometricamente, o quociente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é o declive da recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. O que o Teorema de Lagrange nos diz é que existe uma recta tangente ao gráfico de f paralela à recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange

Corolários do Teorema de Lagrange

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em I .

1) Se

$$f'(x) = 0 \text{ para qualquer } x \in I,$$

então f é constante.

2) Se

$$f'(x) = g'(x) \text{ para qualquer } x \in I,$$

então a diferença $f - g$ é constante em I .

3) Se $f'(x) > 0$ para qualquer $x \in I$, então f é **estritamente crescente** em I , ou seja, para quaisquer $x, y \in I$,

$$\text{se } x > y, \text{ então } f(x) > f(y).$$

4) Se $f'(x) < 0$ para qualquer $x \in I$, então f é **estritamente decrescente** em I , ou seja, para quaisquer $x, y \in I$,

$$\text{se } x > y, \text{ então } f(x) < f(y).$$

Regra de Cauchy

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $]a, b[$ tais que

$$g'(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in]a, b[.$$

Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = +\infty.$$

Se $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Teorema de Cauchy

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$. Se

$$g'(x) \neq 0 \text{ para qualquer } x \in]a, b[,$$

então existe

$$c \in]a, b[$$

tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Observações

a) O resultado continua válido se substituirmos

$$\lim_{x \rightarrow a^+}$$

por

$$\lim_{x \rightarrow b^-}.$$

b) O resultado também é válido quando calculamos o limite em pontos interiores do domínio das funções.

Regra de Cauchy quando $x \rightarrow +\infty$

Sejam a um número real e $f, g:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $]a, +\infty[$ e tais que

$$g'(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in]a, +\infty[.$$

Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty.$$

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observação

O resultado continua válido se substituirmos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}$$

por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty},$$

sendo neste caso o domínio das funções um intervalo do tipo $] -\infty, a[$.

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy

1) Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{0}{0},$$

temos pela regra de Cauchy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

2) Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \frac{0}{0}$, usando a regra de Cauchy temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - e^x)'}{(\sin x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{\cos x - 1} = \frac{0}{0}.$$

Aplicando novamente a regra de Cauchy vem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x e^{\sin x} - e^x)'}{(\cos x - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} - e^x}{-\sin x} \\ &= \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

2) (continuação) Temos de aplicar novamente a regra de Cauchy

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x} - e^x]'}{[-\sin x]'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2 \sin x \cos x - \cos x) e^{\sin x} + (\cos^2 x - \sin x) \cos x e^{\sin x} - e^x}{-\cos x} \\ &= \frac{-1 + 1 - 1}{-1} = 1 \end{aligned}$$

Este limite podia ter sido calculado mais facilmente da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{e^{\sin x - x} - 1}{\sin x - x} = e^0 \cdot 1 = 1.$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

3) Vejamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad a > 0.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

aplicando a regra de Cauchy temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{ax^a} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

4) Vejamos como calcular $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} \ln(\ln x) = 0 \times (-\infty)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} \ln(\ln x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{(x-1)^{-1/2}} = \frac{\infty}{\infty},$$

podemos usar a regra de Cauchy e temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} \ln(\ln x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[\ln(\ln x)]'}{[(x-1)^{-1/2}]'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1/x}{\ln x}}{-\frac{1}{2(x-1)^{3/2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2(x-1)^{3/2}}{x \ln x} = \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

4) (continuação) Atendendo a que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{3/2}}{\ln x} = \frac{0}{0}$, aplicando novamente a regra de Cauchy temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{3/2}}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{((x-1)^{3/2})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{3(x-1)^{1/2}}{2}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x(x-1)^{1/2}}{2} = 0, \end{aligned}$$

peço que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} \ln(\ln x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2(x-1)^{3/2}}{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2}{x} \frac{(x-1)^{3/2}}{\ln x} = 0. \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

5) Calculemos agora $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \cotg x = +\infty - (+\infty)$. Transformando esta indeterminação na seguinte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \cotg x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \frac{0}{0},$$

podemos aplicar a regra de Cauchy. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)'}{(x \sin x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

5) (continuação) Aplicando novamente a regra de Cauchy temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \cotg x = 0.$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

6) Calculemos agora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x.$$

Neste caso temos uma indeterminação do tipo 0^0 . Atendendo a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln[(\sin x)^x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(\sin x)},$$

basta calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0},$$

podemos aplicar a regra de Cauchy.

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

6) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} (-x \cos x) = 1.0 = 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(\sin x)} = e^0 = 1.$$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

- Derivadas: definição, regras de derivação e exemplos
- Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy
- Derivadas de ordem superior e fórmula de Taylor
- Aplicações do cálculo diferencial

4 Primitivas

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Mais geralmente, se existirem as derivadas de f até à ordem $n - 1$ e as representarmos por

$$f', f'', \dots, f^{(n-1)}$$

e $f^{(n-1)}$ é derivável em a , então diz-se que f tem **derivada de ordem n** em a e

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(a + h) - f^{(n-1)}(a)}{h}. \end{aligned}$$

Sejam D um subconjunto não vazio de \mathbb{R} e

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável em D . Se f' é diferenciável em $a \in D$, então diz-se que f é **duas vezes diferenciável** em a e a derivada de f' em a designa-se por **segunda derivada** de f em a e representa-se por

$$f''(a) \text{ ou } \frac{d^2 f}{dx^2}(a) \text{ ou ainda } D^2 f(a)$$

e é dada por

$$f''(a) = (f')'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{h}.$$

Uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de **classe C^n** , e escreve-se

$$f \in C^n(D),$$

se f é n vezes diferenciável em D e a derivada de ordem n , $f^{(n)}$ é contínua em D .

Por extensão, escreve-se

$$f \in C^0(D) \text{ ou } f \in C(D)$$

para designar que f é contínua em D .

Se f admite derivadas de todas as ordens em D , então dizemos que f é **indefinidamente diferenciável** ou de **classe C^∞** e usa-se a notação

$$f \in C^\infty(D).$$

Exemplos

a) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^m,$$

$m \in \mathbb{N}$, é uma função de classe C^∞ . De facto

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)\dots(m-(n-1))x^{m-n} & \text{se } n < m; \\ m! & \text{se } n = m; \\ 0 & \text{se } n > m. \end{cases}$$

Mais geralmente, qualquer polinómio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é de classe C^∞ .

Exemplos (continuação)

c) A função exponencial é de classe C^∞ pois fazendo

$$f(x) = e^x$$

temos

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Exemplos (continuação)

b) Se

$$p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

são dois polinómios, então fazendo

$$D = \{x \in \mathbb{R}: q(x) \neq 0\}$$

tem-se que a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

e, portanto,

$$f \in C^\infty(D).$$

Exemplos (continuação)

d) A função seno é uma função de classe C^∞ . De facto, fazendo

$$f(x) = \sin x,$$

temos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } n = 4k - 3, k \in \mathbb{N}; \\ -\sin x & \text{se } n = 4k - 2, k \in \mathbb{N}; \\ -\cos x & \text{se } n = 4k - 1, k \in \mathbb{N}; \\ \sin x & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

o que mostra que a função seno pertence a $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exemplos (continuação)

e) Do mesmo modo, a função cosseno é uma função de classe C^∞ . De facto, se

$$f(x) = \cos x,$$

temos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{se } n = 4k - 3, \ k \in \mathbb{N}; \\ -\cos x & \text{se } n = 4k - 2, \ k \in \mathbb{N}; \\ \sin x & \text{se } n = 4k - 1, \ k \in \mathbb{N}; \\ \cos x & \text{se } n = 4k, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exemplos (continuação)

f) (continuação) Vimos que

$$f'_1(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x},$$

a função f'_1 não é contínua. Assim, f_1 é diferenciável, mas não é de classe C^1 . Mais geral, a função $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} x^{2k} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

tem derivadas até à ordem k , mas não é de classe C^k .

Exemplos (continuação)

f) A função $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

é diferenciável, mas a primeira derivada não é contínua. Como

$$\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

e

$$f'_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

temos

$$f'_1(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Exemplos (continuação)

g) Se

$$f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

têm derivada até à ordem n , então os mesmo acontece com

$$f + g \quad \text{e} \quad fg$$

e

$$(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

e

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x).$$

Esta última igualdade é conhecida por **fórmula de Leibnitz**.

Fórmula de Taylor (com resto de Lagrange)

Sejam I um intervalo,

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função de classe C^n , $n + 1$ vezes diferenciável em int I e a um ponto de I . Para cada $x \in I \setminus \{a\}$, existe c estritamente entre a e x tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Ao polinómio de Taylor de grau um de uma função f em torno de a chamamos **linearização** ou **aproximação linear** de f em torno de $x = a$, ou seja, a função dada por

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a linearização de f em torno de $x = a$. Nestas condições escrevemos

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ao polinómio de Taylor de grau dois de uma função f em torno de $x = a$, isto é, à função dada por

$$Q(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2,$$

chamamos **aproximação quadrática** de f em torno de $x = a$ e escrevemos

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

A

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

chamamos **polinómio de Taylor de grau n** da função f em torno de $x = a$ e a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

resto Lagrange de ordem n da função f em torno de $x = a$.

Se $a = 0$ a fórmula de Taylor designa-se por **fórmula de Mac-Laurin** e o polinómio de Taylor designa-se por **polinómio de Mac-Laurin**.

Exemplos

- 1) Seja f a função exponencial. Atendendo a que $f^{(n)}(x) = e^x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, o polinómio de Mac-Laurin de grau n é dado por

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

e, por conseguinte, temos a seguinte aproximação linear

$$e^x \approx 1 + x$$

e a seguinte aproximação quadrática

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Exemplos (continuação)

2) Seja f a função seno. Então

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{k+1} & \text{se } n = 2k - 1, \ k \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{se } n = 2k, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

e, portanto,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x).$$

Assim, neste exemplo as aproximações linear e quadrática são iguais:

$$\sin x \approx x.$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 **Cálculo diferencial em \mathbb{R}**
 - Derivadas: definição, regras de derivação e exemplos
 - Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy
 - Derivadas de ordem superior e fórmula de Taylor
 - Aplicações do cálculo diferencial
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Exemplos (continuação)

3) Se f é a função coseno, então

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k, \ k \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{se } n = 2k - 1, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

e, consequentemente,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

e temos

$$\cos x \approx 1 \quad \text{e} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

como aproximações linear e quadrática, respectivamente.

Nesta secção vamos ver aplicações das derivadas em termos de

- monotonia de uma função;
- extremos locais de uma função;
- convexidade e pontos de inflexão de uma função.

Já vimos que para estudar a monotonia de uma função basta estudar o sinal da primeira derivada. Isso é consequência de corolários do Teorema de Lagrange:

Corolários do Teorema de Lagrange

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em I .

- 1) Se $f'(x) > 0$ para qualquer $x \in I$, então f é **estritamente crescente** em I , ou seja, para quaisquer $x, y \in I$,

$$\text{se } x > y, \text{ então } f(x) > f(y).$$

- 2) Se $f'(x) < 0$ para qualquer $x \in I$, então f é **estritamente decrescente** em I , ou seja, para quaisquer $x, y \in I$,

$$\text{se } x > y, \text{ então } f(x) < f(y).$$

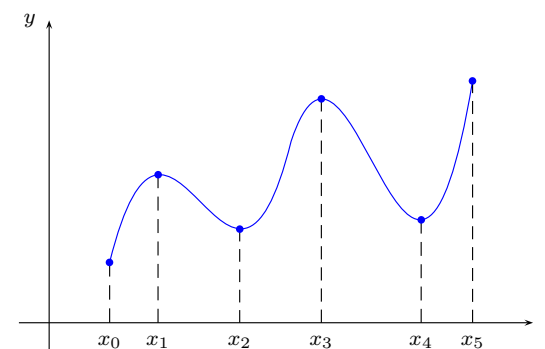
Sejam D um subconjunto não vazio de \mathbb{R} , $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$. Diz-se que a função f tem um **máximo local ou relativo** no ponto a ou que $f(a)$ é um **máximo local ou relativo** da função f se existir um $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(a) \text{ qualquer que seja } x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D.$$

Do mesmo modo, diz-se que a função f tem um **mínimo local ou relativo** no ponto a ou que $f(a)$ é um **mínimo local ou relativo** da função f se existir um $\varepsilon > 0$ tal que

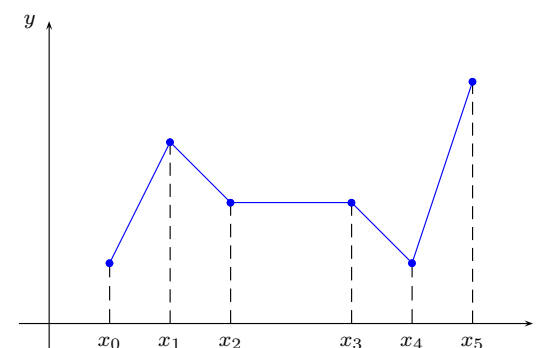
$$f(x) \geq f(a) \text{ qualquer que seja } x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D.$$

Diz-se que f tem um **extremo local ou relativo** no ponto a ou que $f(a)$ é um **extremo local ou relativo** da função f se f tiver um máximo ou um mínimo local no ponto a .



Os pontos x_0, x_2 e x_4 são pontos onde a função tem mínimos locais, enquanto que a função tem máximos locais nos pontos x_1, x_3 e x_5 .

A figura sugere que nos pontos x_1, x_2, x_3, x_4 a derivada da função é nula.



Para a função representada na figura anterior vê-se facilmente que nos pontos x_0, x_2 e x_4 a função tem mínimos locais e que nos pontos x_1, x_3 e x_5 a função tem máximos locais. Além disso, para em qualquer $a \in]x_2, x_3[$ a função tem um máximo e um mínimo local.

Teorema de Fermat

Seja

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável num ponto a interior a D . Se $f(a)$ é um extremo local de f , então

$$f'(a) = 0.$$

A condição $f'(a) = 0$ não é suficiente para a existência de extremo. Por exemplo a função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$f(x) = x^3,$$

tem derivada nula no ponto $x = 0$, mas $f(0)$ não é extremo local.

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função m vezes diferenciável, $m > 1$, num ponto a interior ao intervalo I . Suponhamos que

$$f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Então

- i)* se m é ímpar, f não tem qualquer extremo local no ponto a ;
- ii)* se m é par, f tem em a um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local, consoante

$$f^{(m)}(a) < 0 \quad \text{ou} \quad f^{(m)}(a) > 0.$$

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função duas vezes diferenciável num ponto a interior a I com

$$f'(a) = 0.$$

Então

- i)* se $f''(a) > 0$, a é um ponto de mínimo local;
- ii)* se $f''(a) < 0$, a é um ponto de máximo local.

Exemplo

Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R . Pela lei de Ohm, a corrente I no circuito é

$$I = \frac{V}{R + r}.$$

Se a potência resultante é dada por $P = I^2 R$, mostre que a potência máxima ocorre se $R = r$.

De $P = I^2 R$, temos $P = \left(\frac{V}{R + r}\right)^2 R = \frac{V^2 R}{(R + r)^2}$. Assim, o que temos de fazer é calcular os extremos locais da função

$$P(R) = \frac{V^2 R}{(R + r)^2}.$$

Exemplo (continuação)

Derivando a função $P(R) = \frac{V^2 R}{(R + r)^2}$ temos

$$\begin{aligned} P'(R) &= \frac{V^2 (R + r)^2 - 2(R + r)V^2 R}{(R + r)^4} \\ &= \frac{V^2 (R + r) - 2V^2 R}{(R + r)^3} \\ &= \frac{V^2 r - V^2 R}{(R + r)^3} \\ &= \frac{V^2 (r - R)}{(R + r)^3} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$P'(R) = 0 \Leftrightarrow R = r.$$

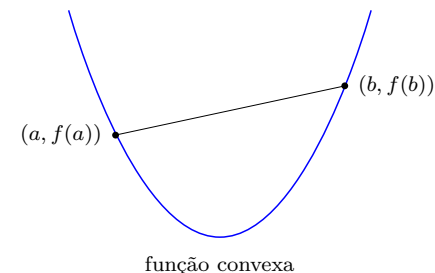
Exemplo (continuação)

Para verificarmos que $R = r$ é um ponto de máximo local, atendendo a que

$$P'(R) = \frac{V^2 (r - R)}{(R + r)^3},$$

podemos fazer o seguinte quadro

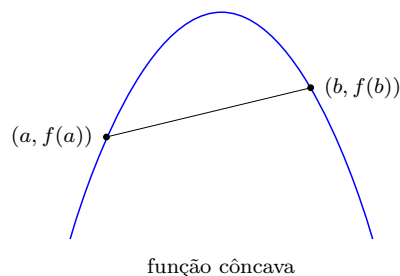
R		r	
$P'(R)$	+	0	-
$P(R)$	\nearrow	M	\searrow



Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **convexa** ou que tem a **concavidade voltada para cima** em I se para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está abaixo da secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$.



A função f diz-se **côncava** ou que tem a **concavidade voltada para baixo** em I se para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está acima da secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$.

Fazendo $x = (1 - t)a + tb$, $t \in [0, 1]$, nas desigualdades que caracterizam as definições de função convexa e de função côncava temos as seguintes definições alternativas:

A função f é **convexa** em I se para cada $a, b \in I$ e para cada $t \in [0, 1]$,

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

A função f diz-se **côncava** em I se, para cada $a, b \in I$ e para cada $t \in [0, 1]$,

$$f((1 - t)a + tb) \geq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

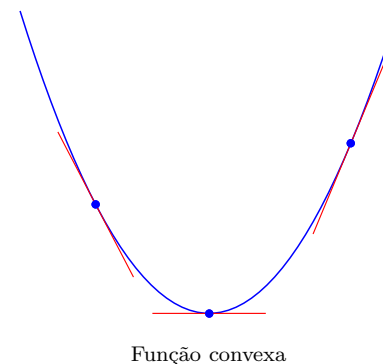
Obviamente, uma função f é côncava se e só se $-f$ é convexa.

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) f é convexa;
- b) a derivada de f é monótona crescente;
- c) para quaisquer $a, x \in I$ temos

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a),$$

ou seja, o gráfico de f está acima das suas rectas tangentes.

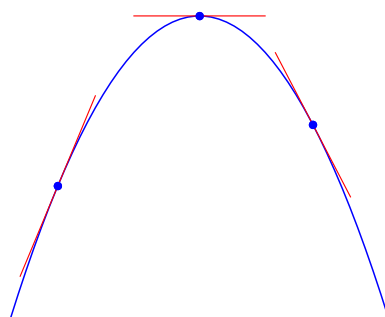


Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) f é côncava;
- b) a derivada de f é monótona decrescente;
- c) para quaisquer $a, x \in I$ temos

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a),$$

ou seja, o gráfico de f está abaixo das suas rectas tangentes.



Função côncava

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em I . Então

- a) f é convexa em I se e só se

$$f''(x) \geq 0$$

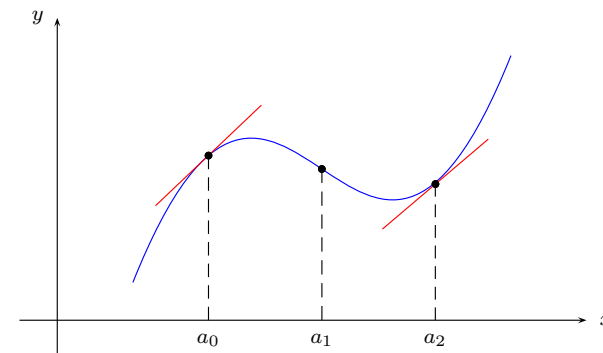
para qualquer $x \in I$;

- b) f é côncava em I se e só se

$$f''(x) \leq 0$$

para qualquer $x \in I$.

Sejam I um intervalo, a um ponto interior a I e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que a é um **ponto de inflexão** de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que num dos conjuntos $]a - \varepsilon, a[$ ou $]a, a + \varepsilon[$ a função é convexa e no outro é côncava.



Na figura anterior vemos que a função f é côncava à esquerda de a_1 e é convexa à direita de a_1 . Logo a_1 é um ponto de inflexão.

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função duas vezes diferenciável. Se $a \in I$ é um ponto de inflexão de f , então

$$f''(a) = 0.$$

Assim, podemos usar a informação que as derivadas nos fornecem para fazer o esboço do gráfico de uma função. Para tal devemos estudar

- o domínio da função;
- os zeros da função;
- a continuidade da função;
- a paridade da função;
- os intervalos de monotonia da função;
- os extremos relativos da função;
- as concavidades da função;
- os pontos de inflexão da função;
- as assíntotas da função.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$

Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Vamos fazer um estudo completo desta função. Esta função tem como domínio a seguinte função

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

e como

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 1,$$

f tem apenas um zero no ponto $x = 0$. Além disso, a função é contínua pois é o quociente de duas funções polinomiais.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Obviamente, esta função não é par nem é ímpar. A função é diferenciável em todo o domínio e primeira derivada é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Calculemos os zeros da primeira derivada

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x=0 \vee x=2) \wedge x \neq 1. \end{aligned}$$

Atendendo a que o denominador de f' é sempre positivo, temos o seguinte quadro de sinal

x		0		1		2	
$f'(x)$	+	0	-	ND	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	M	\searrow	ND	\searrow	m	\nearrow

Além disso, $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Fazendo um quadro temos

x		1	
$f''(x)$	-	ND	+
$f(x)$	\cap	ND	\cup

o que nos permite concluir que f tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

A segunda derivada de f é dada por

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 2x)'(x-1)^2 - [(x-1)^2]'(x^2 - 2x)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2 - 2x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

e, portanto, f não tem pontos de inflexão já que a segunda derivada não tem zeros.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Quanto a assíntotas, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2(1 - 1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 1/x} = 1$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1 - 1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 1/x} = 1 \end{aligned}$$

a recta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota não vertical à direita do gráfico de f . Do mesmo modo se conclui que esta recta também é assíntota não vertical à esquerda do gráfico de f .

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Por outro lado, tendo em conta que o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e que f é uma função contínua, a única possibilidade para assíntota vertical ao gráfico de f é a recta de equação $x = 1$. Como

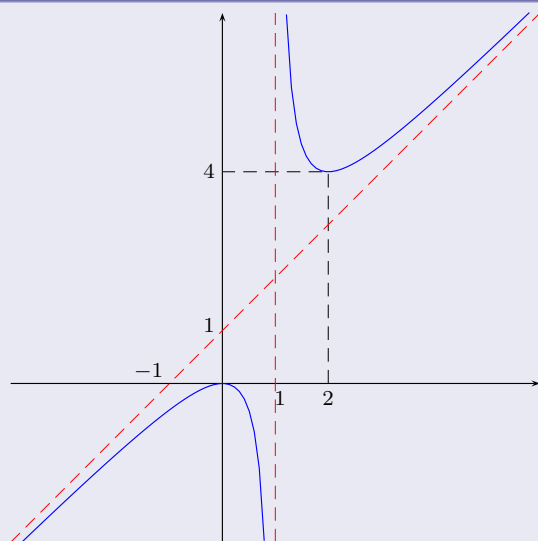
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

a recta de equação $x = 1$ é de facto uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Estamos em condições de esboçar o gráfico de f .

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 **Primitivas**
 - Primitivas imediatas
 - Primitivação por partes
 - Primitivação por substituição
 - Primitivas de funções racionais
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 **Primitivas**
 - Primitivas imediatas
 - Primitivação por partes
 - Primitivação por substituição
 - Primitivas de funções racionais
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Sejam I um intervalo e

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função. Chama-se **primitiva** de f em I a toda a função

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F'(x) = f(x) \text{ para qualquer } x \in I.$$

Diz-se que f é **primitivável** em I quando f possui pelo menos uma primitiva.

Sejam I um intervalo e

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma primitiva de uma função

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Então, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, a função

$$F + c$$

é também uma primitiva de f .

Reciprocamente, qualquer outra primitiva de f é da forma

$$F + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

a) Uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x$$

é a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

b) Dum modo mais geral, dado $n \in \mathbb{N}$, uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^n$$

é a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

O conjunto das primitivas de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ representa-se por

$$\int f(x) dx.$$

Tendo em conta o que vimos anteriormente, se $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f temos

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Por uma questão de simplicidade de escrita escrevemos apenas

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Assim,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

e de um modo mais geral

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Se f e g são duas funções primitiváveis num intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, então

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

e

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 dx \\ = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c. \end{aligned}$$

Nem todas as funções são primitiváveis. Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

não é primitivável em \mathbb{R} , pois se F fosse uma primitiva de f , a restrição de F ao intervalo $]0, +\infty[$ seria uma função da forma $x + c$ e a restrição de F ao intervalo $] -\infty, 0[$ seria da forma d . Assim a restrição de F a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ seria

$$F(x) = \begin{cases} x + c & \text{se } x > 0; \\ d & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

e independentemente do valor que se dê a $F(0)$, a função F não é derivável em $x = 0$, o que contradiz o facto de F ser uma primitiva de f .

Já sabemos que para qualquer $x > 0$ se tem

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

e se $x < 0$ tem-se

$$[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Assim, uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a função $\ln|x|$. No entanto, as funções do tipo

$$\ln|x| + c$$

não nos dão todas as primitivas de $f(x) = \frac{1}{x}$. Para obtermos todas as primitivas de f temos de considerar todas as funções da forma

$$\begin{cases} \ln x + c_1 & \text{se } x > 0; \\ \ln(-x) + c_2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por uma questão de simplicidade passamos a representar todas as funções da forma

$$\begin{cases} \ln x + c_1 & \text{se } x > 0; \\ \ln(-x) + c_2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

por

$$\ln|x| + c,$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$$

O que foi feito relativamente à função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

será feito relativamente a todas as funções cujo domínio é a reunião de intervalos.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\alpha \neq -1$$

$$\int u'(x) [u(x)]^\alpha dx = \frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int u'(x) \sin [u(x)] dx = -\cos [u(x)] + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int u'(x) \cos [u(x)] dx = \sin [u(x)] + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 [u(x)]} dx = \operatorname{tg} [u(x)] + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 [u(x)]} dx = -\operatorname{cotg} [u(x)] + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int u'(x) \sinh [u(x)] dx = \cosh [u(x)] + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int u'(x) \cosh [u(x)] dx = \sinh [u(x)] + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} [u(x)] + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [u(x)] + c$$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

• Primitivas imediatas

• Primitivação por partes

• Primitivação por substituição

• Primitivas de funções racionais

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Sejam I um intervalo e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que f é primitivável em I e g é diferenciável em I . Se F é uma primitiva de f , tem-se

$$[F(x)g(x)]' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

o que implica

$$f(x)g(x) = [F(x)g(x)]' - F(x)g'(x).$$

Assim, fg é primitivável se e só se Fg' o é e

$$\int f(x)g(x) dx = \int [F(x)g(x)]' dx - \int F(x)g'(x) dx,$$

ou seja,

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

e atendendo a que F é uma primitiva de f vem

$$\boxed{\int f(x)g(x) dx = \left(\int f(x) dx \right) \cdot g(x) - \int \left(\int f(x) dx \right) \cdot g'(x) dx}$$

que é a fórmula de primitivação por partes.

Exemplos de primitivação por partes

a) Calculemos por partes $\int x \operatorname{sen} x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2} (\operatorname{sen} x)' \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx.\end{aligned}$$

A primitiva que agora temos de calcular é mais complicada do que a inicial. No entanto, trocando os papeis das funções temos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x \, dx &= (-\cos x) x - \int (-\cos x) x' \, dx \\ &= -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + c.\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes (continuação)

b) Para primitivarmos a função $\ln x$ temos de primitivar por partes:

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx \\ &= x \ln x - \int x (\ln x)' \, dx \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes (continuação)

c) Vejamos como primitivar a função $\operatorname{arctg} x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int x (\operatorname{arctg} x)' \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes (continuação)

d) A primitiva de $\operatorname{arcsen} x$ calcula-se de forma semelhante:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsen} x \, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arcsen} x \, dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x - \int x (\operatorname{arcsen} x)' \, dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes (continuação)

e) Primitivando por partes a função $\sin^2 x$ temos

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \sin x \, dx \\
 &= -\cos x \sin x - \int -\cos x (\sin x)' \, dx \\
 &= -\cos x \sin x - \int -\cos x \cos x \, dx \\
 &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\
 &= -\sin x \cos x + \int 1 - \sin^2 x \, dx \\
 &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx.
 \end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes (continuação)

e) (continuação) Fazendo $I = \int \sin^2 x \, dx$ em

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

tem-se

$$I = -\sin x \cos x + x - I$$

o que implica

$$2I = -\sin x \cos x + x$$

e, portanto,

$$I = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Assim,

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + c.$$

Exemplos de primitivação por partes (continuação)

f) Primitivemos por partes a função $e^x \sin x$:

$$\begin{aligned}
 \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx \\
 &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
 &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' \, dx \right) \\
 &= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (-\sin x) \, dx \\
 &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx
 \end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes (continuação)

f) (continuação) De

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

concluimos que

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

e, portanto,

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

- Primitivas imediatas
- Primitivação por partes
- Primitivação por substituição
- Primitivas de funções racionais

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Exemplos de primitivação por substituição

a) Para calcularmos $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$, fazemos a substituição
 $x = a \operatorname{sen} t$

e, portanto,

$$dx = (a \operatorname{sen} t)' dt = a \cos t dt$$

o que dá

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} a \cos t dt \\ &= \int \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 t)} a \cos t dt \\ &= \int \sqrt{a^2 \cos^2 t} a \cos t dt \\ &= \int a \cos t a \cos t dt \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

§4.3 Primitivação por substituição

Sejam I e J dois intervalos de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $\varphi : J \rightarrow I$ uma função bijetiva e diferenciável e tal que $\varphi'(t) \neq 0$ para cada $t \in J$. Suponhamos que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f . Como

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

$F \circ \varphi$ é uma primitiva de $(f \circ \varphi) \varphi'$. Assim, para calcularmos as primitivas de $f(x)$ basta calcularmos as primitivas de $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ e depois fazer a mudança de variável $t = \varphi^{-1}(x)$, ou seja,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Para primitivarmos por substituição usamos a notação

$$dx = \varphi'(t)dt.$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

a) (continuação) Primitivando por partes $\int \cos^2 t dt$ temos

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \cos t \cos t dt \\ &= \operatorname{sen} t \cos t - \int \operatorname{sen} t (-\operatorname{sen} t) dt \\ &= \operatorname{sen} t \cos t + \int 1 - \cos^2 t dt \\ &= \operatorname{sen} t \cos t + t - \int \cos^2 t dt \end{aligned}$$

e, portanto,

$$2 \int \cos^2 t dt = \operatorname{sen} t \cos t + t$$

o que implica

$$\int \cos^2 t dt = \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{2} + \frac{t}{2} + c$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

a) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= a^2 \frac{\sin t \cos t}{2} + a^2 \frac{t}{2} + c\end{aligned}$$

e atendendo a que

$$x = a \sin t,$$

resulta

$$t = \arcsen \frac{x}{a}$$

o que dá

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{ax}{2} \cos \left(\arcsen \frac{x}{a} \right) + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + c \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

b) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 t \cos t} \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 t} dt \\ &= -\cotg t + c \\ &= -\cotg(\arcsen x) + c \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

b) Para calcularmos a primitiva

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

fazemos a substituição

$$x = \sin t$$

o que dá

$$\begin{aligned}dx &= (\sin t)' dt \\ &= \cos t dt.\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

c) Se quisermos calcular a primitiva

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

fazemos a substituição $x = \operatorname{tg} t$, e portanto $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$, o que dá

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t) \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \cos t dt = \sin t + c \\ &= \sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

d) Calculemos

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx,$$

usando a substituição

$$x = 2 \operatorname{tg} t.$$

Então

$$dx = (2 \operatorname{tg} t)' dt = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 4} &= \sqrt{(2 \operatorname{tg} t)^2 + 4} = \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 t + 4} \\ &= \sqrt{4 (\operatorname{tg}^2 t + 1)} = 2 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{2}{\cos t} \end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

e) Calculemos a seguinte primitiva

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}},$$

fazendo a substituição

$$x = \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

e, portanto,

$$dx = \left(\frac{1}{\cos t} \right)' dt = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} dt.$$

Além disso,

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t} = \operatorname{tg} t.$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

d) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx &= \int \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 t} \frac{2}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}} \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \cos t \operatorname{sen}^{-2} t dt = \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{-1} + c \\ &= -\frac{1}{4 \operatorname{sen} t} + c = -\frac{1}{4 \operatorname{sen} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x/2)} + c \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + c \end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

e) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t} \operatorname{tg} t} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \cos t dt \\ &= \operatorname{sen} t + c \\ &= \operatorname{sen} \left(\operatorname{arc} \cos \frac{1}{x} \right) + c \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + c \end{aligned}$$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}

4 Primitivas

- Primitivas imediatas
- Primitivação por partes
- Primitivação por substituição
- Primitivas de funções racionais

5 Cálculo integral em \mathbb{R}

Sejam P e Q dois polinómios com o grau de P menor do que o grau de Q e sem zeros (reais ou complexos) em comum. Então

$$Q(x) = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_k)^{n_k} \left[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2 \right]^{m_1} \dots \left[(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2 \right]^{m_l}$$

onde os zeros reais de Q são

$$a_1, \dots, a_k \quad \text{com multiplicidades} \quad n_1, \dots, n_k,$$

respectivamente, e os zeros complexos de Q são

$$\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i \quad \text{com multiplicidades} \quad m_1, \dots, m_l,$$

respectivamente, e

$$\alpha_1 - \beta_1 i, \dots, \alpha_l - \beta_l i \quad \text{com multiplicidades} \quad m_1, \dots, m_l,$$

respectivamente.

§4.4 Primitivas de funções racionais

Uma função racional é uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinómios e $D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Assumimos que P e Q não têm zeros (reais ou complexos) comuns. Se o grau de P é maior ou igual do que o grau de Q , então fazendo a divisão de P por Q temos

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

e, portanto,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde D e R são polinómios e o grau de R é menor do que o grau de Q . Assim, para primitivarmos as funções racionais basta sabermos primitivar as funções racionais onde o grau do numerador é menor do que o grau do denominador.

§4.4 Primitivas de funções racionais

Além disso, existem números reais $A's$, $B's$ e $C's$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{1,n_1}}{(x - a_1)^{n_1}} + \\ & + \dots + \frac{A_{k,1}}{x - a_k} + \dots + \frac{A_{k,n_k}}{(x - a_k)^{n_k}} + \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \dots + \frac{B_{1,m_1}x + C_{1,m_1}}{\left[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2 \right]^{m_1}} + \\ & + \dots + \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2} + \dots + \frac{B_{l,m_l}x + C_{l,m_l}}{\left[(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2 \right]^{m_l}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{i,j}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{\left[(x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2 \right]^j}.$$

Exemplos de primitivação de funções racionais

a) Calculemos

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx.$$

Fazendo a divisão de x^2 por $x^2 - 1$ temos

$$\begin{array}{r} +x^2 +0x +0 \quad | \quad x^2 +0x -1 \\ -x^2 +0x +1 \quad \quad \quad 1 \\ \hline +0x +1 \end{array}$$

e, portanto,

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Agora precisamos de factorizar o denominador. Para isso basta ter em conta que zeros do denominador que são 1 e -1 .

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

a) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx &= \int 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= x + \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + c. \end{aligned}$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

a) (continuação) Então existem números reais A e B tais que

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)},$$

pelo que

$$A(x + 1) + B(x - 1) = 1.$$

Fazendo $x = -1$ resulta que $B = -1/2$ e fazendo $x = 1$ tem-se $A = 1/2$, ou seja,

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1}.$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

b) Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^3 (x^2 + 1)}.$$

Então temos de ter

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^3 (x^2 + 1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

e, portanto,

$$\frac{A(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + Cx^2(x^2 + 1) + (Dx + E)x^3}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{x + 1}{x^3(x^2 + 1)},$$

o que implica

$$A(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + Cx^2(x^2 + 1) + (Dx + E)x^3 = x + 1.$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

b) (continuação) Fazendo $x = 0$ em

$$A(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + Cx^2(x^2 + 1) + (Dx + E)x^3 = x + 1.$$

temos $A = 1$ e fazendo $x = i$ tem-se

$$(Di + E)i^3 = i + 1 \Leftrightarrow (Di + E)(-i) = 1 + i \Leftrightarrow D - Ei = 1 + i$$

o que implica $D = 1$ e $E = -1$. Fazendo $x = 1$ obtemos

$$2A + 2B + 2C + D + E = 2 \Leftrightarrow 2 + 2B + 2C + 1 - 1 = 2 \Leftrightarrow B + C = 0$$

e fazendo $x = -1$ resulta

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 2C + D - E &= 2 \Leftrightarrow 2 - 2B + 2C + 1 - (-1) = 2 \\ &\Leftrightarrow -2B + 2C = -4 \\ &\Leftrightarrow -B + C = -2, \end{aligned}$$

o que dá o sistema

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ -B + C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -C \\ C + C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

b) (continuação) Assim,

$$\frac{x+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

pelo que

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+1}{x^3(x^2+1)} dx \\ &= \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx \\ &= \int x^{-3} dx + \int x^{-2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctg x + c \\ &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctg x + c \end{aligned}$$

Tendo em conta a decomposição que obtivemos, para primitivarmos funções racionais basta sabermos calcular as seguintes primitivas

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx$$

e

$$\int \frac{Bx+C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k} dx,$$

onde $A, B, C, a, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$.

O primeiro primitivas é bastante simples de calcular pois quando $k = 1$ temos

$$\int \frac{A}{(x-a)} dx = A \ln|x-a| + c$$

e quando $k > 1$ vem

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int (x-a)^{-k} dx \\ &= A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c \\ &= -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c. \end{aligned}$$

Para as funções do tipo

$$\frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

fazendo a mudança de variável $x = \alpha + \beta t$ tem-se $dx = \beta dt$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx &= \int \frac{B(\alpha + \beta t) + C}{\beta^2 t^2 + \beta^2} \beta dt \\ &= \int \frac{\beta Bt + \alpha B + C}{\beta^2 (t^2 + 1)} \beta dt \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt + \frac{\alpha B + C}{\beta} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{B}{2} \ln |t^2 + 1| + \frac{\alpha B + C}{\beta} \operatorname{arctg} t + c \\ &= \frac{B}{2} \ln \left| \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right)^2 + 1 \right| + \frac{\alpha B + C}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha}{\beta} + c \end{aligned}$$

§4.4 Primitivas de funções racionais

Usando a mesma mudança de variável $x = \alpha + \beta t$, pelo que $dx = \beta dt$, vem

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k} dx &= \int \frac{B(\alpha + \beta t) + C}{(\beta^2 t^2 + \beta^2)^k} \beta dt \\ &= \int \frac{\beta Bt + \alpha B + C}{\beta^{2k} (t^2 + 1)^k} \beta dt \\ &= \frac{B}{2\beta^{2k-2}} \int \frac{2t}{(t^2 + 1)^k} dt + \frac{\alpha B + C}{\beta^{2k-1}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt \\ &= \frac{B}{2\beta^{2k-2}} \int 2t (t^2 + 1)^{-k} dt + \frac{\alpha B + C}{\beta^{2k-1}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt \\ &= \frac{B}{2\beta^{2k-2}} \frac{(t^2 + 1)^{-k+1}}{-k+1} + \frac{\alpha B + C}{\beta^{2k-1}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt \end{aligned}$$

e, portanto, temos de saber calcular

$$I_k = \int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt.$$

Para isso temos

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt = \int \frac{t^2 + 1 - t^2}{(t^2 + 1)^k} dt = \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{k-1}} dt - \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^k} dt \\ &= I_{k-1} - \frac{1}{2} \int 2t (t^2 + 1)^{-k} t dt \\ &= I_{k-1} - \frac{1}{2} \left[\frac{(t^2 + 1)^{-k+1}}{-k+1} t - \int \frac{(t^2 + 1)^{-k+1}}{-k+1} 1 dt \right] \\ &= I_{k-1} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-k} \frac{t}{(t^2 + 1)^{k-1}} - \frac{1}{1-k} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{k-1}} dt \right] \\ &= I_{k-1} + \frac{1}{2k-2} \frac{t}{(t^2 + 1)^{k-1}} + \frac{1}{2-2k} I_{k-1} \\ &= \frac{3-2k}{2-2k} I_{k-1} + \frac{1}{2k-2} \frac{t}{(t^2 + 1)^{k-1}} \end{aligned}$$

o que dá uma fórmula por recorrência para calcular primitivas do tipo

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt.$$

§4.4 Primitivas de funções racionais

Primitivação de funções racionais – resumo

Para primitivarmos uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com P e Q polinómios sem zeros (reais ou complexos) comuns, devemos fazer o seguinte:

- 1) se o grau de P é maior ou igual do que o grau de Q , fazemos a divisão de P por Q . Deste modo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é igual à soma de um polinómio com uma função racional em que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador;
- 2) factorizar $Q(x)$ como o produto de factores da forma

$$x - a \quad \text{ou} \quad (x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

agrupando os factores repetidos de modo que fiquemos com factores diferentes da forma

$$(x - a)^n \quad \text{ou} \quad [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m,$$

com $n, m \in \mathbb{N}$;

Primitivação de funções racionais – resumo (continuação)

- 3) decompor a função racional (a que obtivemos na divisão ou a inicial, caso não tenha sido necessário fazer a divisão) numa soma de parcelas da forma

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^2} + \frac{A_n}{(x-a)},$$

por cada factor

$$(x-a)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

que aparece na factorização de $Q(x)$, e da forma

$$\frac{B_1x + C_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{B_2x + C_2}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}} + \cdots + \frac{B_{m-1}x + C_{m-1}}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2} + \frac{B_mx + C_m}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

por cada factor

$$[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m, \quad m \in \mathbb{N}$$

que aparece na factorização de $Q(x)$ e onde cada A_k , cada B_k e cada C_k é um número real;

- 4) primitivar cada uma das parcelas obtidas na decomposição.

§4.4 Primitivas de funções racionais

Exemplo de primitivação de uma função racional

Calculemos a primitiva

$$\int \frac{3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2}{x^2(x^2 + 1)^2} dx.$$

Pelo que vimos anteriormente temos de fazer a seguinte decomposição

$$\frac{3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1)^2 + (Cx + D)x^2 + (Ex + F)x^2(x^2 + 1) \\ = 3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^5 + 2x^3 + x) + Cx^3 + Dx^2 + E(x^5 + x^3) + F(x^4 + x^2) \\ = 3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} (B + E)x^5 + (A + F)x^4 + (2B + C + E)x^3 + (2A + D + F)x^2 + Bx + A \\ = 3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Assim, de

$$\begin{aligned} (B + E)x^5 + (A + F)x^4 + (2B + C + E)x^3 + (2A + D + F)x^2 + Bx + A \\ = 3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{cases} B + E = 3 \\ A + F = 3 \\ 2B + C + E = 6 \\ 2A + D + F = 6 \\ B = 1 \\ A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = 2 \\ F = 1 \\ C = 2 \\ D = 1 \\ B = 1 \\ A = 2 \end{cases}$$

pelo que

$$\frac{3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1}.$$

§4.4 Primitivas de funções racionais

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Deste modo

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2}{x^2(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 \int x^{-2} dx + \int \frac{1}{x} dx + \int 2x(x^2 + 1)^{-2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \\ & \quad + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x| + \frac{(x^2 + 1)^{-1}}{-1} + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \ln|x^2 + 1| + \arctg x \\ &= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{x^2 + 1} + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \ln|x^2 + 1| + \arctg x. \end{aligned}$$

Falta calcular

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx \\
&= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \\
&= \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int 2x(x^2+1)^{-2} x dx \\
&= \arctg x - \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} x - \int \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} 1 dx \right] \\
&= \arctg x - \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} dx \right] \\
&= \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctg x + c \\
&= \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + c
\end{aligned}$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Tendo em conta que

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + c,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x + 2}{x^2(x^2+1)^2} dx \\
&= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + \ln|x^2+1| + \arctg x \\
&= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \ln|x^2+1| + \arctg x + c \\
&= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \ln|x^2+1| + \frac{3}{2} \arctg x + c
\end{aligned}$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Fazendo a substituição $x = \operatorname{tg} t$, podemos calcular $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ de outro modo. Assim, tendo em conta que $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{(1/\cos^2 t)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\
&= \int \cos^2 t dt = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{1}{4} \int 2 \cos(2t) dt + \frac{1}{2} \int 1 dt \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) + \frac{t}{2} + c = \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{2} + \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\arctg x) \cos(\arctg x)}{2} + \frac{\arctg x}{2} + c \\
&= \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg x + c
\end{aligned}$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 Cálculo integral em \mathbb{R}
 - Integral de Riemann: definição, propriedades e exemplos
 - Teorema Fundamental do Cálculo
 - Integração por partes e integração por substituição
 - Aplicações do cálculo integral
 - Integrais impróprios

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 **Cálculo integral em \mathbb{R}**
 - Integral de Riemann: definição, propriedades e exemplos
 - Teorema Fundamental do Cálculo
 - Integração por partes e integração por substituição
 - Aplicações do cálculo integral
 - Integrais impróprios

Seja

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função limitada. Para cada partição

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

de $[a, b]$, usa-se a notação

$$m_i = m_i(f, P) = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

$$M_i = M_i(f, P) = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$i = 1, \dots, n$.

Seja $[a, b]$ um intervalo de \mathbb{R} com mais do que um ponto, ou seja, $a < b$.
Chama-se **partição** de $[a, b]$ a todo o subconjunto

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

com

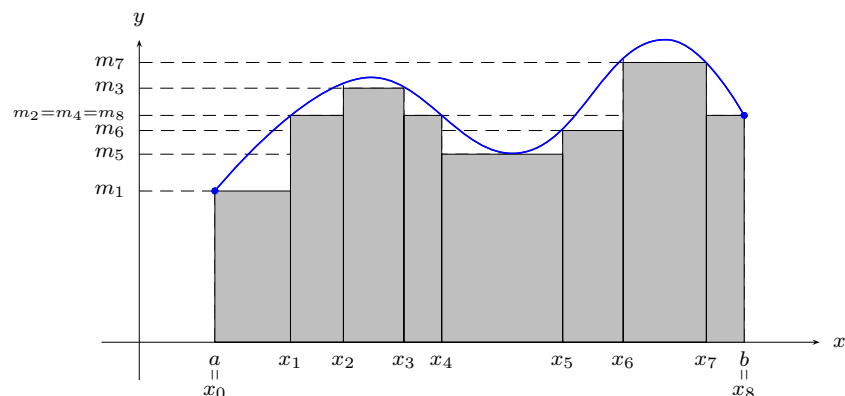
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Designa-se por **soma inferior** da função f relativa à partição P ao número

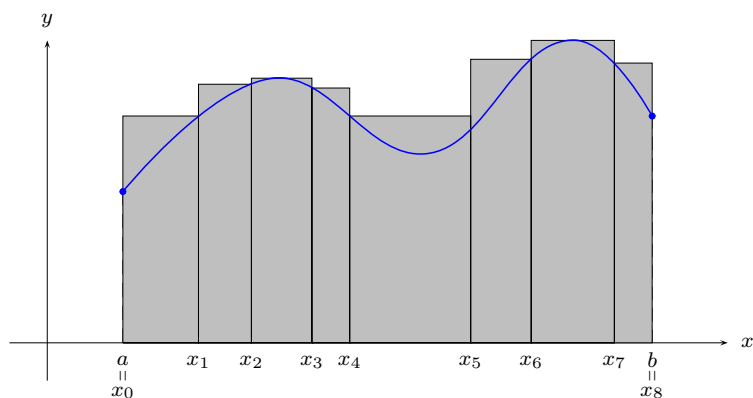
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f, P) (x_i - x_{i-1}).$$

Do mesmo modo, chamamos **soma superior** da função f relativa à partição P ao número

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f, P) (x_i - x_{i-1}).$$



Interpretação geométrica das somas inferiores
de uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



Interpretação geométrica das somas superiores
de uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Exemplos de somas superiores e de somas inferiores

- a) Consideremos a função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dada uma partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$, temos

$$m_i(f, P) = c \quad \text{e} \quad M_i(f, P) = c$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i(f, P) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c (x_i - x_{i-1}) \\ &= c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c (b - a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i(f, P) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c (x_i - x_{i-1}) \\ &= c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c (b - a). \end{aligned}$$

Exemplos de somas superiores e de somas inferiores (continuação)

- b) Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Dada uma partição P de $[0, 1]$, atendendo a que

$$m_i(f, P) = 0 \quad \text{e} \quad M_i(f, P) = 1,$$

temos que

$$s(f, P) = 0 \quad \text{e} \quad S(f, P) = 1.$$

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **integrável à Riemann** em $[a, b]$ se e só se existir um e um só número A tal que

$$s(f, P) \leq A \leq S(f, P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a, b].$$

O único número A que verifica a desigualdade anterior designa-se por **integral de Riemann** de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Exemplos do integral de Riemann (continuação)

b) Já vimos que para a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$$

se tem

$$s(f, P) = 0 \quad \text{e} \quad S(f, P) = 1$$

qualquer que seja a partição P de $[0, 1]$. Portanto, se $A \in [0, 1]$ tem-se

$$0 = s(f, P) \leq A \leq S(f, P) = 1$$

para qualquer partição P de $[0, 1]$, o que mostra que f não é integrável à Riemann em $[0, 1]$.

Exemplos do integral de Riemann

a) Consideremos novamente a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$. Já vimos que para qualquer partição P de $[a, b]$ tem-se

$$s(f, P) = c(b - a) = S(f, P).$$

Assim,

$$s(f, P) \leq c(b - a) \leq S(f, P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a, b]$$

e

$$c(b - a)$$

é o único número real que verifica as estas desigualdades. Logo f é integrável à Riemann em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Propriedades dos integrais

Sejam a e b números reais tais que $a < b$.

a) Se

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

são funções integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

b) Se λ é um número real e

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função integrável em $[a, b]$, então λf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Propriedades dos integrais (continuação)

c) Se a, b e c são números reais tais que $a < c < b$ e

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função limitada, então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Além disso,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

d) Se

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

são duas funções integráveis em $[a, b]$ tais que

$$f(x) \leq g(x) \text{ para cada } x \in [a, b],$$

então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 **Cálculo integral em \mathbb{R}**
 - Integral de Riemann: definição, propriedades e exemplos
 - **Teorema Fundamental do Cálculo**
 - Integração por partes e integração por substituição
 - Aplicações do cálculo integral
 - Integrais impróprios

Propriedades dos integrais (continuação)

e) Seja

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função integrável. Então $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

f) Toda a função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.

g) Toda a função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.

No que se segue vamos fazer as seguintes convenções

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

e

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função integrável. Então a função

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é contínua em $[a, b]$. Além disso, se f é contínua num ponto $c \in [a, b]$, então F é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c).$$

Corolário do Teorema Fundamental do Cálculo

Se a e b são números reais tais que $a < b$ e

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função contínua, então f é primitivável. Além disso, se

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma primitiva de f , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Esta última igualdade designa-se por **fórmula de Barrow**.

A fórmula de Barrow costuma usar-se a seguinte notação

$$\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Vejamos que a fórmula de Barrow é válida em condições mais gerais:

Fórmula de Barrow

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função integrável à Riemann em $[a, b]$ e primitivável em $[a, b]$. Então, representando por F uma primitiva de f , tem-se

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplos

a) Calculemos

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Pelo que vimos anteriormente, para calcularmos o integral dado, basta termos uma primitiva da função

$$f(x) = x^2.$$

Como uma primitiva de f é a função dada por

$$F(x) = \frac{x^3}{3},$$

temos

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exemplos (continuação)

b) Calculemos agora $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$. Então

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx &= [-\cos x]_0^{\pi/2} \\ &= -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

c) Obviamente também se tem

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &= [\sin x]_0^{\pi/2} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Exemplos (continuação)

$$\begin{aligned}e) \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2/4}} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}} \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}} \, dx \\ &= \left[\arcsen \frac{x}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsen \frac{0}{2} \\ &= \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Exemplos (continuação)

$$\begin{aligned}d) \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3} \, dx &= \int_1^2 x^{-3} \, dx \\ &= \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 \\ &= \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2 \cdot 2^2} - \left(-\frac{1}{2 \cdot 1^2} \right) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Exemplos (continuação)

$$\begin{aligned}f) \quad \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{4+x^6} \, dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{1+x^6/4} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{1+(x^3/2)^2} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2/2}{1+(x^3/2)^2} \, dx = \frac{1}{6} \left[\arctg \frac{x^3}{2} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{1}{6} \left[\arctg \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{2} - \arctg \frac{0^3}{2} \right] \\ &= \frac{1}{6} [\arctg 1 - \arctg 0] \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 **Cálculo integral em \mathbb{R}**
 - Integral de Riemann: definição, propriedades e exemplos
 - Teorema Fundamental do Cálculo
 - **Integração por partes e integração por substituição**
 - Aplicações do cálculo integral
 - Integrais impróprios

§5.3 Integração por partes e integração por substituição

Integração por partes

Sejam a e b números reais tais $a < b$ e

$$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

funções diferenciáveis com derivadas integráveis. Então

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Exemplos de integração por partes

a) Calculemos $\int_1^e \ln x dx$. Então

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e 1 \cdot \ln x dx \\ &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx \\ &= e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - 0 - \int_1^e 1 dx \\ &= e - \left[x \right]_1^e \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

§5.3 Integração por partes e integração por substituição

Exemplos de integração por partes (continuação)

$$\begin{aligned} b) \quad \int_0^\pi x \cos x dx &= \int_0^\pi (\cos x) x dx \\ &= \left[(\sin x) x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (\sin x) x' dx \\ &= (\sin \pi) \pi - (\sin 0) 0 - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= \int_0^\pi -\sin x dx \\ &= \left[\cos x \right]_0^\pi \\ &= \cos \pi - \cos 0 \\ &= -1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

Exemplos de integração por partes (continuação)

$$\begin{aligned}
 c) \quad \int_0^2 x^2 e^x dx &= \int_0^2 e^x x^2 dx \\
 &= \left[e^x x^2 \right]_0^2 - \int_0^2 e^x (x^2)' dx \\
 &= e^2 2^2 - e^0 0^2 - 2 \int_0^2 e^x x dx \\
 &= 4e^2 - 2 \left(\left[e^x x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x x' dx \right) \\
 &= 4e^2 - 2 \left(e^2 2 - e^0 0 - \int_0^2 e^x dx \right) \\
 &= 2 \left[e^x \right]_0^2 = 2(e^2 - e^0) = 2e^2 - 2
 \end{aligned}$$

Exemplos de integração por partes (continuação)

$$\begin{aligned}
 d) \quad \text{Calculemos } \int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx: \\
 \int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx &= \left[\sin x e^x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x (e^x)' dx \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} e^{\pi/2} - \sin 0 e^0 - \int_0^{\pi/2} \sin x e^x dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left[\left[-\cos x e^x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x (e^x)' dx \right] \\
 &= e^{\pi/2} - \left[-\cos \frac{\pi}{2} e^{\pi/2} - (-\cos 0 e^0) \right] - \int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx \\
 &= e^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx.
 \end{aligned}$$

Exemplos de integração por partes (continuação)

d) (continuação) Acabámos de ver que

$$\int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx = e^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx,$$

e, portanto,

$$2 \int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx = e^{\pi/2} - 1,$$

o que implica

$$\int_0^{\pi/2} \cos x e^x dx = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}.$$

Integração por substituição

Sejam a, b, c e d números reais tais que $a < b$ e $c < d$,

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua e

$$g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável com derivada integrável e tal que

$$g([c, d]) \subseteq [a, b].$$

Então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) dt.$$

Exemplos de integração por substituição

a) Calculemos $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ fazendo a substituição $t = \sqrt{x}$. Então

$$x = t^2, \text{ pelo que } dx = 2t dt.$$

Além disso, quando $x = 0$ temos $t = 0$ e quando $x = 4$ vem $t = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^2 \frac{1}{1+t} 2t dt = 2 \int_0^2 \frac{t}{1+t} dt \\ &= 2 \int_0^2 \frac{1+t-1}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= 2 \left(\int_0^2 1 dt - \int_0^2 \frac{1}{1+t} dt \right) = 2 \left([t]_0^2 - [\ln|1+t|]_0^2 \right) \\ &= 2(2 - 0 - (\ln 3 - \ln 1)) = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

b) Calculemos $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$. Para isso fazemos a substituição

$$t = \sqrt{x+3},$$

isto é,

$$x = t^2 - 3$$

e, portanto,

$$dx = (t^2 - 3)' dt = 2t dt.$$

Além disso,

quando $x = 1$ vem $t = 2$

e

quando $x = 6$ temos $t = 3$.

Exemplos de integração por substituição (continuação)

b) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx &= \int_2^3 \frac{t^2 - 3}{t} 2t dt \\ &= 2 \int_2^3 t^2 - 3 dt \\ &= 2 \left[\frac{t^3}{3} - 3t \right]_2^3 \\ &= 2 \left(\frac{27}{3} - 9 - \left(\frac{8}{3} - 6 \right) \right) \\ &= 2 \left(6 - \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

c) Para calcularmos $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ fazemos a substituição

$$e^x = t,$$

o que implica

$$x = \ln t$$

e, portanto,

$$dx = \frac{1}{t} dt.$$

Além disso,

quando $x = 0$ temos $t = 1$ e quando $x = 1$ vem $t = e$.

Assim,

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{1}{t+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt.$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

c) (continuação) Para calcularmos

$$\int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt$$

temos de determinar os números A e B tais que

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}.$$

Então

$$A(t+1) + Bt = 1,$$

pelo que quando $t = 0$ temos $A = 1$ e quando $t = -1$ vem $B = -1$ e, por conseguinte,

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

c) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt \\ &= \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[\ln |t| - \ln |t+1| \right]_1^e \\ &= \ln e - \ln(e+1) - (\ln 1 - \ln 2) \\ &= 1 - \ln \frac{e+1}{2}. \end{aligned}$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

d) Calculemos $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$. Para isso usamos a substituição

$$x = \operatorname{tg} t, \text{ o que implica } dx = (\operatorname{tg} t)' dt = \frac{1}{\cos^2 t} dt.$$

Obviamente, atendendo a que $t = \arctg x$,

$$\text{quando } x = -1 \text{ tem-se } t = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

e

$$\text{quando } x = 1 \text{ vem } t = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Repare-se que

$$(1+x^2)^2 = (1+\operatorname{tg}^2 t)^2 = \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)^2 = \frac{1}{\cos^4 t}.$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

d) (continuação) Assim,

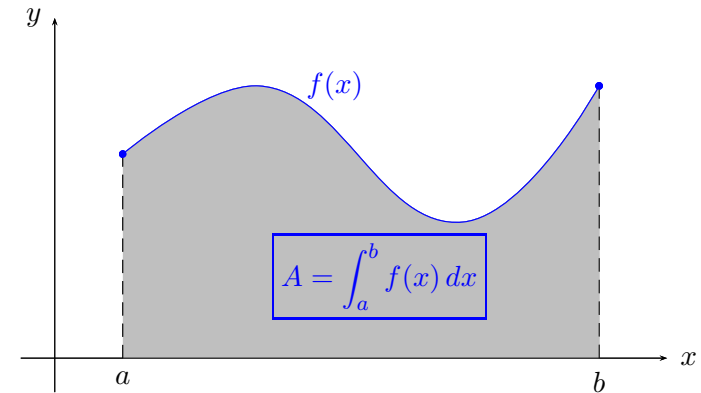
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{1/\cos^4 t} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 t dt \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2t) + 1 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + t \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{2} + \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi + 2}{4} \end{aligned}$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 **Cálculo integral em \mathbb{R}**
 - Integral de Riemann: definição, propriedades e exemplos
 - Teorema Fundamental do Cálculo
 - Integração por partes e integração por substituição
 - **Aplicações do cálculo integral**
 - Integrais impróprios

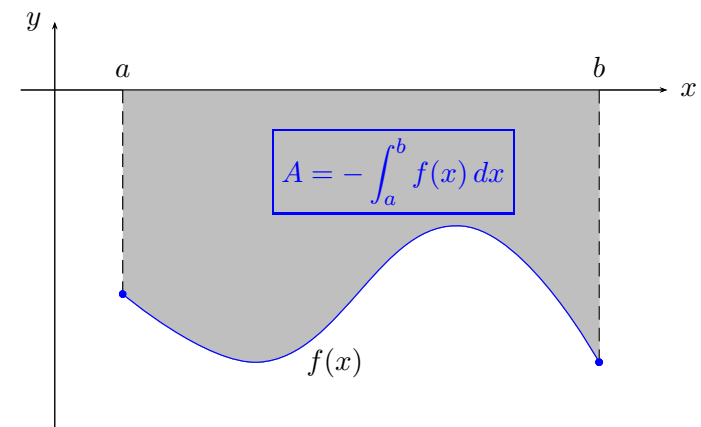
Nesta secção veremos como aplicar o cálculo integral para

- calcular a área de regiões planas;
- calcular o comprimento de curvas planas;
- calcular a área de superfície e o volume de um sólido de revolução.

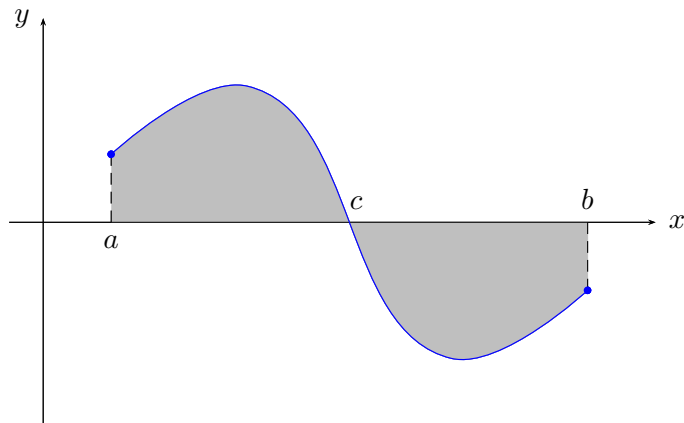
Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) \geq 0$ para qualquer $x \in [a, b]$.



Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) \leq 0$ para qualquer $x \in [a, b]$.

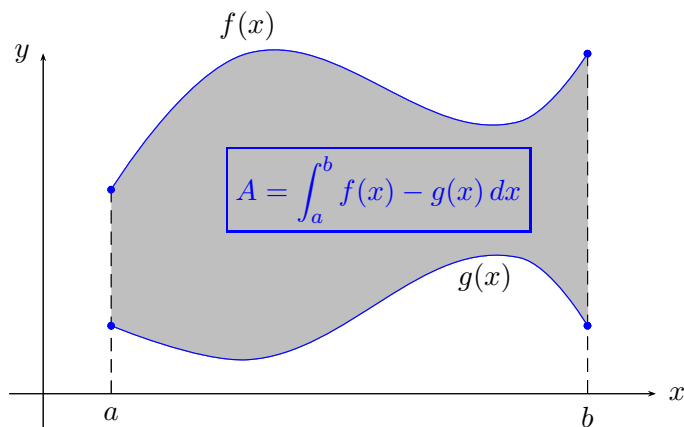


Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável tal que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(x) \geq 0$ para qualquer $x \in [a, c]$ e $f(x) \leq 0$ para qualquer $x \in [c, b]$.



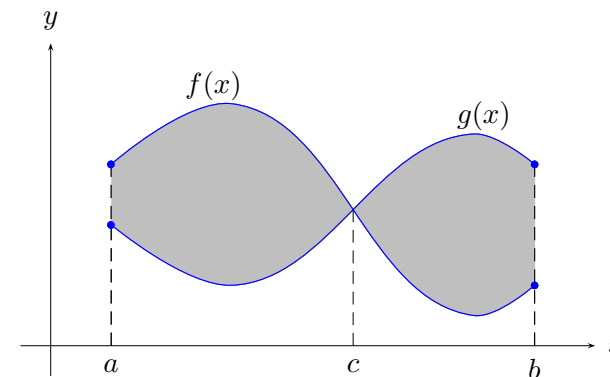
$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma funções integráveis tal que $f(x) \geq g(x)$ para qualquer $x \in [a, b]$.



$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis tal que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(x) \geq g(x)$ para qualquer $x \in [a, c]$ e $f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \in [c, b]$.



$$A = \int_a^c f(x) - g(x) dx + \int_c^b g(x) - f(x) dx$$

Exemplos do cálculo da área de figuras planas

a) Calculemos a área da região plana limitada pelas rectas de equação

$$y = x, \quad y = 2 - x \quad \text{e} \quad x = 0.$$

Como nenhuma destas rectas é paralela às outras duas, a região plana de que queremos calcular a área é um triângulo. Calculemos os vértices desse triângulo. Para isso temos de resolver os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = x \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2x \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

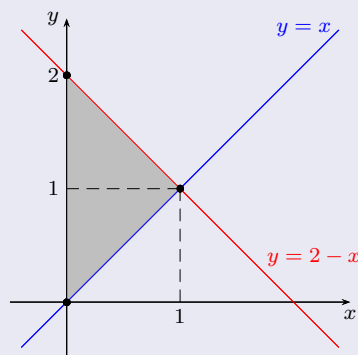
$$\begin{cases} y = x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Assim, a região plana de que queremos calcular a área é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(0, 0)$ e $(0, 2)$.

Exemplos do cálculo da área de figuras planas

- a) (continuação) Façamos a representação geométrica da região e calculemos a sua área.



Assim, a área do triângulo é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2 - x - x \, dx \\ &= \int_0^1 2 - 2x \, dx \\ &= \left[2x - x^2 \right]_0^1 \\ &= 2 \cdot 1 - 1^2 - (2 \cdot 0 - 0^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplos do cálculo da área de figuras planas (continuação)

- b) Calculemos a área da região plana limitada pela recta de equação

$$y = x + 2$$

e pela parábola de equação

$$y = x^2.$$

Começemos por calcular os pontos de intersecção das duas curvas:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x + 2 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \text{---} \end{cases}$$

Como

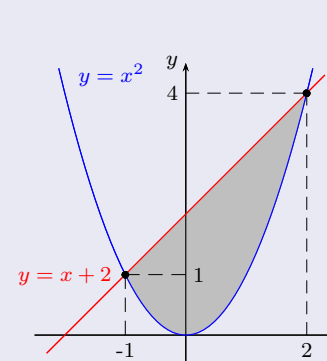
$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1,$$

os pontos de intersecção são (2, 4) e (-1, 1).

Exemplos do cálculo da área de figuras planas

- b) (continuação) Representemos geometricamente a região do plano de que queremos calcular a área.

Assim, a área é



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \\ &\quad - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Exemplos do cálculo da área de figuras planas (continuação)

- c) Calculemos a área da região plana limitada pelas rectas de equação

$$y = 2x, \quad y = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad y = -x + 3.$$

A região do plano de que queremos calcular a área é um triângulo pois é limitada por três rectas. Calculemos os seus vértices.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x/2 = 2x \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4x \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

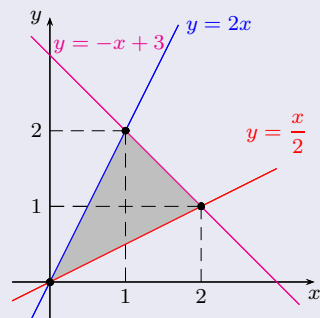
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3 = 2x \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -3 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x/2 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3 = x/2 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = x \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -6 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Assim, os vértices do triângulo são (0, 0), (1, 2) e (2, 1).

Exemplos do cálculo da área de figuras planas (continuação)

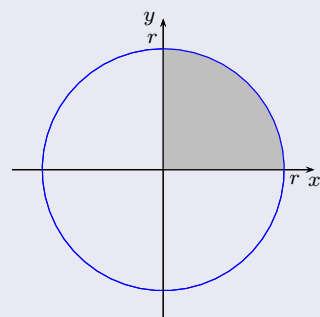
c) (continuação) Representemos geometricamente o triângulo e calculemos a sua área.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 2x - \frac{x}{2} dx + \int_1^2 -x + 3 - \frac{x}{2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{3x}{2} dx + \int_1^2 \frac{3x}{2} + 3 dx \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 x dx - \frac{3}{2} \int_1^2 x dx + 3 \int_1^2 1 dx \\
 &= \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 3 [x]_1^2 \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + 3(2 - 1) \\
 &= \frac{3}{4} - \frac{9}{4} + 3 \\
 &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Exemplos do cálculo da área de figuras planas (continuação)

d) Calculemos a área de um círculo de raio r . Por uma questão de simplicidade vamos considerar o centro do círculo a origem. Obviamente, basta calcular a área da parte do círculo que está no primeiro quadrante e multiplicar esse valor por quatro. Para isso temos encontrar a equação da curva que limita superiormente a zona sombreada da figura. Da equação da circunferência temos



$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2 \\
 &\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}
 \end{aligned}$$

e, portanto, a curva que limita superiormente a zona sombreada é

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Assim, a área do círculo de raio r é dada por

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Exemplos do cálculo da área de figuras planas (continuação)

d) (continuação) Para calcularmos $A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ temos de fazer a substituição

$$x = r \sin t$$

e, portanto,

$$dx = (r \sin t)' dt = r \cos t dt.$$

Além disso, como

$$t = \arcsen \frac{x}{r}$$

resulta que

quando $x = 0$ temos $t = \arcsen 0 = 0$

e

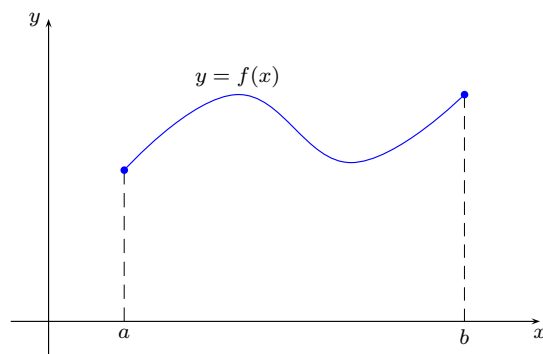
quando $x = r$ temos $t = \arcsen 1 = \frac{\pi}{2}$.

Exemplos do cálculo da área de figuras planas (continuação)

d) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - (r \sin t)^2} r \cos t dt \\
 &= 4r \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 (1 - \sin^2 t)} \cos t dt = 4r \int_0^{\pi/2} r \cos t \cos t dt \\
 &= 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt \\
 &= 2r^2 \int_0^{\pi/2} \cos(2t) + 1 dt = 2r^2 \left[\frac{\sin(2t)}{2} + t \right]_0^{\pi/2} \\
 &= 2r^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - \left(0 + \frac{\sin 0}{2} \right) \right) = 2r^2 \frac{\pi}{2} \\
 &= \pi r^2.
 \end{aligned}$$

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua.

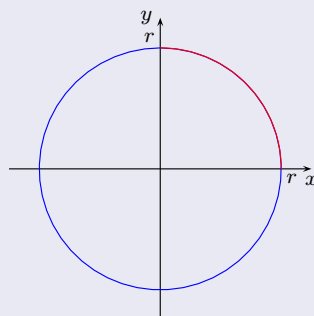


O comprimento do gráfico de f é dado por

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemplos do cálculo do comprimento de curvas planas

- a) Calculemos o perímetro de uma circunferência de raio r . Para isso consideremos como centro da circunferência a origem. Obviamente basta considerar a parte da circunferência situada no primeiro quadrante.



Exemplos do cálculo do comprimento de curvas planas (continuação)

- a) (continuação) Da equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, resulta $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Como

$$\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

temos

$$\begin{aligned} \ell &= 4 \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4r \int_0^r \frac{1/r}{\sqrt{1 - (x/r)^2}} dx = 4r \left[\arcsen \frac{x}{r} \right]_0^r \\ &= 4r (\arcsen 1 - \arcsen 0) = 4r \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 2\pi r. \end{aligned}$$

Exemplos do cálculo do comprimentos de curvas planas (continuação)

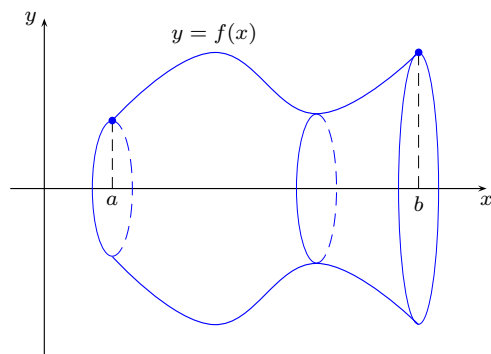
- b) Calculemos o comprimento da curva $y = x^{3/2}$ entre $x = 0$ e $x = 1$. Como

$$\left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

temos

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x/4} dx \\ &= \frac{4}{9} \int_0^1 \frac{9}{4} (1 + 9x/4)^{1/2} dx = \frac{4}{9} \left[\frac{(1 + 9x/4)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} - \frac{2}{3} 1^{3/2} \right) = \frac{4}{9} \left(\frac{2}{3} \frac{13\sqrt{13}}{4\sqrt{4}} - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{13\sqrt{13}}{27} - \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

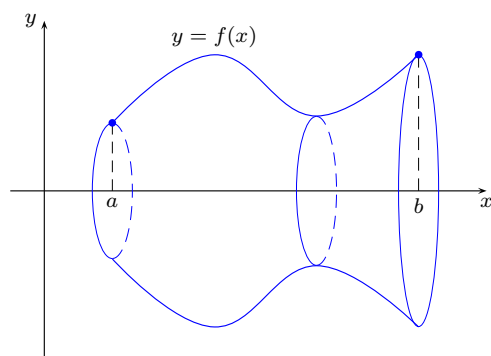


O volume do sólido de revolução que se obtém rodando o gráfico de f em torno do eixo dos xx é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

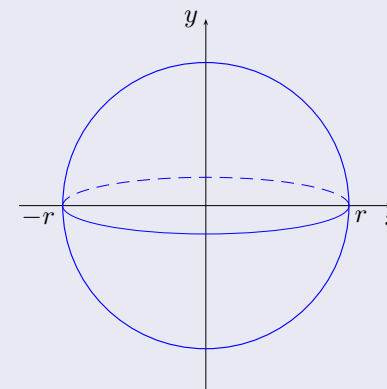
Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não negativa e com derivada contínua, então a área de superfície do sólido de revolução que se obtém rodando o gráfico de f em torno do eixo dos xx é dada por

$$A_S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$



Volume e área de superfície de um sólido de revolução

- a) Calculemos o volume e a área de superfície de uma esfera de raio r . Como habitualmente vamos centrar a esfera na origem. Uma esfera de raio r centrada na origem obtém-se rodando em torno do eixo dos xx uma semicircunferência de centro na origem e de raio r .



Volume e área de superfície de um sólido de revolução (continuação)

- a) (continuação) Já sabemos que temos de a equação da semicircunferência é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde o volume da esfera de raio r é igual a

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ &= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right) \\ &= \pi \left(2r^3 - 2\frac{r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Volume e área de superfície de um sólido de revolução (continuação)

a) (continuação) Quanto à área da superfície esférica, atendendo a que

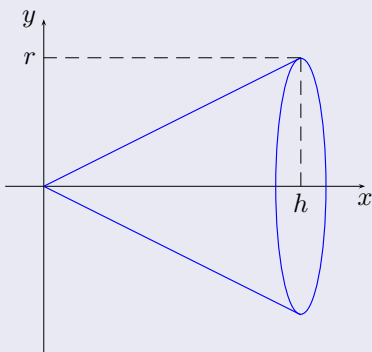
$$\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

temos

$$\begin{aligned} A_S &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r r dx = 2\pi r \int_{-r}^r 1 dx \\ &= 2\pi r [x]_{-r}^r = 2\pi r (r - (-r)) = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Volume e área de superfície de um sólido de revolução (continuação)

b) Calculemos o volume e a área de superfície de um cone de altura h e raio da base r . Para obtermos este cone basta pormos a rodar em torno do eixo dos xx o segmento de recta que une os pontos $(0, 0)$ e (h, r) :



É óbvio que a equação do segmento é $y = \frac{r}{h}x$ com $x \in [0, h]$

Volume e área de superfície de um sólido de revolução (continuação)

b) (continuação) O volume é do cone é

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}$$

Volume e área de superfície de um sólido de revolução (continuação)

b) (continuação) A área de superfície do cone é

$$\begin{aligned} A_S &= 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \left[\left(\frac{r}{h}x\right)'\right]^2} dx = \frac{2\pi r}{h} \int_0^h x \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} dx \\ &= \frac{2\pi r}{h} \int_0^h x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx = \frac{2\pi r}{h} \int_0^h x \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} dx \\ &= \frac{2\pi r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \int_0^h x dx = \frac{2\pi r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h \\ &= \frac{2\pi r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \end{aligned}$$

- 1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- 2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- 3 Cálculo diferencial em \mathbb{R}
- 4 Primitivas
- 5 **Cálculo integral em \mathbb{R}**
 - Integral de Riemann: definição, propriedades e exemplos
 - Teorema Fundamental do Cálculo
 - Integração por partes e integração por substituição
 - Aplicações do cálculo integral
 - **Integrais impróprios**

Na definição do integral de Riemann de uma função

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

exigimos que o intervalo

$$[a, b] \text{ fosse fechado e limitado}$$

e que a função

$$f \text{ fosse limitada.}$$

Suponha-se, no entanto, que

- i) f está definida em $[a, +\infty[$ e existe $\int_a^u f(x) dx$ para cada $u \in [a, +\infty[$; ou
- ii) f está definida em $] -\infty, b]$ e existe $\int_t^b f(x) dx$ para cada $t \in] -\infty, b]$; ou ainda
- iii) f está definida em $] -\infty, +\infty[$ e existe $\int_t^u f(x) dx$ para cada $t, u \in \mathbb{R}$.

Nestas condições, temos, para cada uma das três situações consideradas, as seguintes definições

$$i) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx$$

$$ii) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

$$iii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_c^u f(x) dx$$

Dizemos que os integrais

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

existem ou que são **convergentes** quando existirem (finitos) os limites indicados; se o limites não existirem dizemos que o respectivo integral é **divergente**.

Os integrais considerados designam-se por **integrais impróprios de primeira espécie**.

Na definição *iii*) não há dependência do ponto c escolhido. Na prática pode-se fazer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \int_t^u f(x) dx.$$

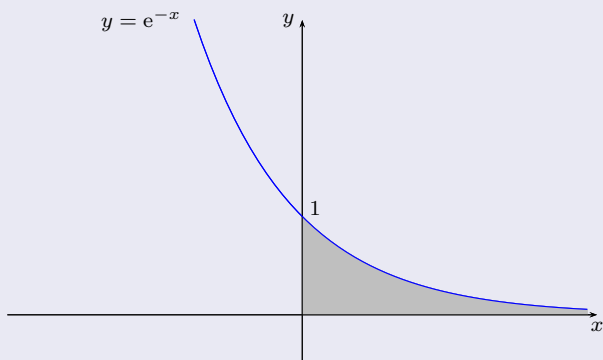
Exemplos de integrais impróprios de primeira espécie

a) Calculemos $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_0^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-e^{-u} - (-e^0) \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} 1 - e^{-u} \\ &= 1 - e^{-\infty} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Exemplos de integrais impróprios de primeira espécie (continuação)

a) (continuação) Assim, o integral $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ é convergente. O valor deste integral pode ser interpretado como sendo a área da região sombreada da figura seguinte.



Exemplos de integrais impróprios de primeira espécie (continuação)

b) Estudemos a **natureza** do integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, ou seja, determinemos se o integral é convergente ou divergente. Começemos por supor $\alpha \neq 1$. Então

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u x^{-\alpha} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Exemplos de integrais impróprios de primeira espécie (continuação)

b) (continuação) Se $\alpha = 1$, então

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\ln |x| \right]_1^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln |u| - \ln |1|) \\ &= \ln(+\infty) - 0 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Assim, o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ é convergente apenas quando $\alpha > 1$. Neste exemplo também podemos interpretar o integral como uma área.

Exemplos de integrais impróprios de primeira espécie (continuação)

c) Calculemos $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$:

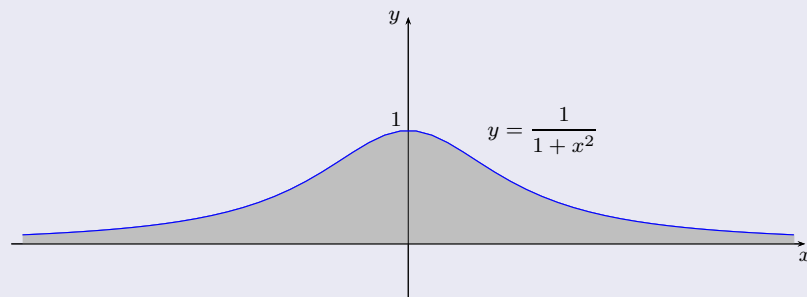
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \int_t^u \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} [\arctg x]_t^u \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} (\arctg u - \arctg t) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Exemplos de integrais impróprios de primeira espécie (continuação)

c) (continuação) A igualdade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

significa que a área da região sombreada na figura seguinte é π .



Critério de comparação

Sejam $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que existe $c \in [a, +\infty[$ tal que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ para qualquer } x > c.$$

Então

i) se

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ é convergente,}$$

então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ também é convergente;}$$

ii) se

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ é divergente,}$$

então

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ também é divergente.}$$

Exemplos

a) Consideremos o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

Atendendo a que

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

para qualquer $x \geq 1$ e que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \text{ é convergente,}$$

pelo critério de comparação, alínea i), o integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx \text{ também é convergente.}$$

Exemplos (continuação)

b) Consideremos agora o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Como

$$0 \leq \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

para qualquer $x \geq 1$ e usando o facto de que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx \text{ é divergente,}$$

pelo critério de comparação, alínea ii), o integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ também é divergente.}$$

Exemplos (continuação)

b) (continuação) Vejamos que de facto o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx \text{ é divergente.}$$

Para isso basta usarmos a definição:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{1}{1+x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} [\ln |1+x|]_1^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} [\ln |1+u| - \ln |1+1|] \\ &= +\infty - \ln 2 \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Observação

Também existem critérios de comparação para os integrais impróprios da forma

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Suponhamos agora que f está definida em $[a, b[$ e que é integrável em qualquer intervalo $[a, u]$ com $u \in [a, b[$. Nesta condições define-se

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx.$$

De forma análoga define-se

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

quando f é está definida em $]a, b]$ e f é integrável em qualquer intervalo $[t, b]$ com $t \in]a, b]$.

Quando f está definida em $[a, c[\cup]c, b]$ para algum $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, u]$ e $[t, b]$ para quaisquer $u \in [a, c[$ e $t \in]c, b]$, define-se

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow c^-} \int_a^u f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Nos três casos considerados anteriormente o integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

designa-se por **integral impróprio de segunda espécie**. O integral diz-se **convergente** se existem e são finitos os limites indicados e diz-se **divergente** quando tal não se verifica.

Exemplos de integrais impróprios de segunda espécie (continuação)

a) (continuação) Quando $\alpha = 1$ temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x-a} dx &= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b \frac{1}{x-a} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} [\ln(x-a)]_t^b \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} (\ln(b-a) - \ln(t-a)) \\ &= \ln(b-a) - \ln(0^+) \\ &= \ln(b-a) - (-\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx \text{ é } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha < 1; \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Exemplos de integrais impróprios de segunda espécie

a) Calculemos $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$. Começemos por supor que $\alpha \neq 1$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx &= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b (x-a)^{-\alpha} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} \left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_t^b \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} \left(\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(t-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplos de integrais impróprios de segunda espécie (continuação)

b) Determinemos a natureza de $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$. Começemos por fazer $\alpha \neq 1$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx &= \lim_{u \rightarrow b^-} - \int_a^u -(b-x)^{-\alpha} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow b^-} - \left[\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_a^u \\ &= \lim_{u \rightarrow b^-} - \left(\frac{(b-u)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplos de integrais impróprios de segunda espécie (continuação)

b) (continuação) Para $\alpha = 1$ vem

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{b-x} dx &= \lim_{u \rightarrow b^-} - \int_a^u -\frac{1}{b-x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow b^-} - [\ln(b-x)]_a^u \\ &= \lim_{u \rightarrow b^-} - (\ln(b-u) - \ln(b-a)) \\ &= -(\ln(0^+) - \ln(b-a)) \\ &= -(-\infty - \ln(b-a)) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx \text{ é } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha < 1; \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Observação

Também existem critérios de comparação para os integrais impróprios de segunda espécie.

Exercícios

a) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$

c) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$

d) $\int_0^1 x \ln^2 x dx$

e) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$

h) $\int_0^1 \frac{1}{x(1-\ln x)} dx$

i) $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^4} dx$

j) $\int_{-\infty}^1 x^5 e^{x^6} dx$

k) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2) \arctg x} dx$

l) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x-1}} dx$