

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E TEORIA DE DIMENSÃO

CÉSAR SILVA

RESUMO. Discute-se um método alternativo para obter a dimensão de hausdorff de conjuntos. Introduce-se a pressão topológica não aditiva no caso em que temos dinâmica simbólica e usa-se este conceito bem como os expoentes de Lyapunov para transformações não necessariamente diferenciáveis para obter estimativas de dimensão de conjuntos limite de construções geométricas.

1. DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Relembramos rapidamente o conceito de dimensão de Hausdorff. Dados um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^m$ e números $s > 0$ e $\delta > 0$ define-se o número

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_\delta} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^s,$$

onde \mathcal{C}_δ é o conjunto das coberturas finitas ou contáveis de F por conjuntos abertos de diâmetro no máximo δ . Atendendo a que toda a cobertura- δ de F é uma cobertura- δ_1 de F para todo o $\delta_1 > \delta$ conclui-se que, para cada s , $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ não decresce à medida que δ diminui. Fica assim bem definido o número

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_\delta} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam } U)^s,$$

que se designa por *medida de Hausdorff* s -dimensional de F . A função $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$ tem o seguinte comportamento: existe um ponto t para o qual se verifica que $\mathcal{H}^s(F) = +\infty$ se $s < t$ e $\mathcal{H}^s(F) = 0$ se $s > t$. A medida de Hausdorff t -dimensional de F pode assumir qualquer valor não negativo. O ponto onde a função $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$ “salta” de $+\infty$ para 0 designa-se por *dimensão de Hausdorff* de F e representa-se por $\dim_H F$. Podemos portanto escrever

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = +\infty\}.$$

Descreveremos de seguida uma construção que conduz à mesma noção de dimensão de um modo alternativo. A nossa abordagem segue Douady e Oesterlé [4].

Dado um elipsóide E com semieixos de comprimento $a_1(E) \geq \dots \geq a_m(E)$ definimos, para cada $1 \leq d \leq m$, o número

$$w_d(E) = a_1(E) \cdots a_{\lfloor d \rfloor}(E) (a_{\lfloor d \rfloor + 1}(E))^{d - \lfloor d \rfloor}.$$

Dado um conjunto F e números $\delta > 0$ e $1 \leq d \leq m$ define-se o número

$$\mathcal{D}_\delta^d(F) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{D}_\delta} \sum_{E \in \mathcal{U}} w_d(E),$$

onde \mathcal{D}_δ designa o conjunto das coberturas de F por elipsóides E tais que $w_d(E)^{\frac{1}{d}} \leq \delta$. Para cada d o número $\mathcal{D}_\delta^d(F)$ não decresce à medida que δ diminui. Fica assim bem definido o número

$$\mathcal{D}^d(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{D}_\delta} \sum_{E \in \mathcal{U}} w_d(E).$$

O teorema seguinte fornece um modo alternativo de determinar a dimensão de Hausdorff.

Teorema 1.1.

$$\dim_H F = \inf\{d : \mathcal{D}^d(F) = 0\} = \sup\{d : \mathcal{D}^d(F) = +\infty\}.$$

Demonstração. Escrevemos $d = d_0 + s$, onde $d_0 \in \mathbb{N}$ e $s \in [0, 1)$. Designemos por $\dim_{DO} F$ a dimensão obtida através da abordagem de Douady e Oesterlé. É fácil mostrar que obtemos a mesma noção de dimensão substituindo em $\mathcal{H}^s(F)$ o conjunto C_δ pelo conjunto \widetilde{C}_δ formado pelas coberturas de F por bolas abertas de raio inferior ou igual a δ . Com esta nova definição temos que $\mathcal{D}^d(F) \leq \mathcal{H}^d(F)$ para cada d . De facto tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^d(F) &= \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{D}_\delta} \sum_{E \in \mathcal{U}} w_d(E) \leq \inf_{\mathcal{U} \in \widetilde{C}_\delta} \sum_{E \in \mathcal{U}} w_d(E) \\ &\quad \uparrow \widetilde{C}_\delta \subset D_\delta \\ &= \inf_{\mathcal{U} \in \widetilde{C}_\delta} \sum_{E \in \mathcal{U}} (\text{diam } E)^d = \mathcal{H}^d(F), \end{aligned}$$

uma vez que sendo E uma bola se tem

$$\begin{aligned} w_d(E) &= \underbrace{[a_1(E) \cdots a_{d_0}(E)]}_{d_0 \text{ parcelas}} \cdot (a_{d_0+1}(E))^s]^{\frac{1}{d}} \\ &= ([a_1(E)]^{d_0+s})^{\frac{1}{d}} = a_1(E) = \text{diam}(E). \end{aligned}$$

Assim $\dim_{DO} F \geq \dim_H F$.

Para estabelecer a outra desigualdade demonstraremos o seguinte lema.

Lema 1.2. *Para todo o $\delta > 0$ e todo o elipsóide E tal que $(w_d(E))^{\frac{1}{d}} \leq \delta$ temos $\mathcal{H}_{\lambda_d \delta}^d(E) \leq C_d w_d(E)$ onde $\lambda_d = \sqrt{d_0 + 1}$ e $C_d = 2^{d_0} (d_0 + 1)^{\frac{d}{2}}$.*

Demonstração. Seja E um elipsóide nas condições anteriores. Suponhamos que E tem equação $\sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$. Escreve-se $d = d_0 + s$ e definimos $E_0 = E \cap \mathbb{R}^{d_0}$. Temos

$$\begin{aligned} \rho &= a_{d_0+1} = (a_{d_0+1} \cdots a_{d_0+1} (a_{d_0+1})^s)^{\frac{1}{d}} \\ (a_1 \cdots a_{d_0} (a_{d_0+1})^s)^{\frac{1}{d}} &= (w_d(E))^{\frac{1}{d}} \leq \delta. \end{aligned}$$

Podemos assim inscrever E_0 num paralelepípedo com volume

$$P = \prod_{i=1}^{d_0} [-a_i, a_i]$$

e recobrir P por N cubos de lado 2ρ com

$$N = \prod_{i=1}^{d_0} (\lfloor \frac{a_i}{\rho} \rfloor + 1).$$

Como $\frac{a_i}{a_{d_0+1}} = \frac{a_i}{\rho} \geq 1$ para $i \leq d_0$ temos que

$$N \leq \prod_{i=1}^{d_0} (2 \lfloor \frac{a_i}{\rho} \rfloor) = 2^{d_0} \prod_{i=1}^{d_0} \frac{a_i}{\rho}.$$

O elipsóide E está assim contido em $E_0 \times B_{H^1}(\rho)$ onde $H^1 = \mathbb{R}^{n-d_0}$. Podemos então cobrir F por N conjuntos da forma $K \times B_{H^1}(\rho)$ onde K é um cubo d_0 -dimensional de lado 2ρ e cada um destes conjuntos está contido numa bola de raio $\sqrt{d_0+1}\rho$. Temos por conseguinte

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sqrt{d_0+1}\delta}^d(E) &= \inf_{\mathcal{U} \in \tilde{\mathcal{C}}_\delta} \sum_{B \in \mathcal{U}} (\text{diam } B)^d \leq N(\sqrt{d_0+1}\rho)^d \\ &\leq 2^{d_0} \left[\prod_{i=1}^{d_0} \frac{a_i}{\rho} \right] \rho^d (d_0+1)^{\frac{d}{2}} = 2^{d_0} a_1 \cdots a_{d_0} \rho^{d-d_0} (d_0+1)^{\frac{d}{2}} \\ &= C_d a_1 \cdots a_{d_0} (a_{d_0+1})^s = C_d w_d(E), \end{aligned}$$

o que estabelece o Lema. \square

Assim, atendendo ao Lema temos

$$w_d(E) \geq \frac{1}{C_d} \mathcal{H}_{\sqrt{d_0+1}\delta}^d(E),$$

e consequentemente

$$\mathcal{D}^d(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{D}_\delta} \sum_{E \in \mathcal{U}} w_d(E) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{C_d} \sum_{E \in \mathcal{U}} \mathcal{H}_{\sqrt{d_0+1}\delta}^d(E) \geq \frac{1}{C_d} H^d(F),$$

o que estabelece o resultado. \square

Dada uma medida finita μ em X , podemos também definir o conceito de *dimensão de Hausdorff da medida* por

$$\dim_H \mu = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{ \dim_H Z : \mu(Z) \geq \mu(X) - \delta \}.$$

Em geral esta quantidade não coincide com a dimensão de Hausdorff do suporte da medida e fornece informação adicional acerca da forma como a medida μ está distribuída no seu suporte.

2. PRESSÃO TOPOLÓGICA NÃO ADITIVA

Seja $f: X \rightarrow X$ uma função contínua definida num espaço métrico compacto X e J um conjunto f -invariante onde é possível introduzir uma dinâmica simbólica. Recordamos o conceito de pressão topológica aditiva: para cada $\varphi \in C(\Sigma_A^+)$ define-se a *pressão topológica aditiva* de φ em J (relativamente a f) por

$$P(\varphi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sum_{i_1 \dots i_n} \sup_{C_{i_1 \dots i_n}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_n \circ f^k.$$

Designa-se aqui por f a função $f \circ \chi$, onde $\chi: \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ é a função de codificação. Este abuso de notação não gera no entanto ambiguidade uma vez que o objecto representado por f fica completamente determinado pelo contexto. Escrevendo $\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_n \circ f^k$ podemos reescrever a pressão topológica como

$$P(\varphi) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sum_{i_1 \dots i_n} \sup_{C_{i_1 \dots i_n}} \phi_n. \quad (1)$$

Gostaríamos de averiguar a possibilidade de substituir ϕ_n por uma sucessão arbitrária. Mostra-se no entanto que, em geral, se ϕ_n for substituída por uma sucessão arbitrária o limite em (1) não existe. Para cada vector de cilindros de comprimento 1 $(C_{i_1}, \dots, C_{i_n})$ definimos

$$C_{i_1 \dots i_n} = \bigcap_{k=1}^n f^{-k+1} C_k, \quad (2)$$

onde mais uma vez representamos $f \circ \chi$ simplesmente por f .

Dada agora uma sucessão de funções $\Phi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n é uma função de $\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$ em \mathbb{R} , define-se

$$\Phi(C_{i_1 \dots i_n}) = \begin{cases} \sup_{\beta \in C_{i_1 \dots i_n}} \varphi_n(\beta) & \text{se } C_{i_1 \dots i_n} \cap \chi^{-1} J \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } C_{i_1 \dots i_n} \cap \chi^{-1} J = \emptyset \end{cases}.$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ define-se

$$M(J, \alpha, \Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\Gamma_n} \sum_{C \in \Gamma_n} \exp(-\alpha m(C) + \sup \Phi(C)), \quad (3)$$

onde Γ_n é o conjunto dos cilindros de comprimento pelo menos n . Pode verificar-se que a função $\alpha \mapsto M(J, \alpha, \Phi)$ tem o seguinte comportamento: existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para $\alpha < \alpha_0$ $M(J, \alpha, \Phi) = +\infty$ e para $\alpha > \alpha_0$

$M(J, \alpha, \Phi) = 0$. Fica assim bem definido o número

$$\begin{aligned} P_J(\Phi) &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : M(J, \alpha, \Phi) = 0\} \\ &= \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : M(J, \alpha, \Phi) = +\infty\}. \end{aligned}$$

Este número diz-se a *pressão topológica não aditiva* de Φ no conjunto J (relativamente a f). Quando Φ é a sucessão de funções $(\varphi \circ f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ para alguma função contínua fixa $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, o número $P_J(\Phi)$ coincide com a pressão topológica clássica da função φ (relativamente a f). Ver [3] para uma discussão detalhada. Existe uma versão mais geral de pressão topológica não aditiva que não requer a existência de dinâmica simbólica (ver [3]).

3. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Relembramos a noção de expoente de Lyapunov para transformações que não são necessariamente diferenciáveis. Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação (não necessariamente diferenciável) e d uma métrica em \mathbb{R}^m . Sejam $x \in \mathbb{R}^m$ e $k \in \{1, \dots, m\}$. Seja ainda $L_{x,k}$ a família dos subespaços afins de dimensão k que passam pelo ponto x e

$$C_x(\delta, n) = \{y \in B_x(\delta, n) \setminus \{x\} : [f^j x, f^j y] \subset f^j B_x(\delta, n), j = 0, \dots, n\};$$

onde

$$B_x(\delta, n) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(f^j x, f^j y) < \delta \text{ para } j \in \{0, \dots, n\}\} \quad (4)$$

e $[v, w] \subset \mathbb{R}^m$ designa o segmento de recta entre v and w .

Os números

$$\Lambda_k^+(x) = \inf_{L \in L_{x,k}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{y \in C_x(\delta, n) \cap L} \frac{d(f^n x, f^n y)}{d(x, y)}, \quad (5)$$

designam-se por *expoentes de Lyapunov superiores* de f no ponto x (ver [2]).

Sejam agora $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação contínua e $J \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto f -invariante. Supomos que J pode ser decomposto em conjuntos disjuntos R_1, \dots, R_p tais que

$$J = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i_1 \dots i_n} R_{i_1 \dots i_n},$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, p\}$ o conjunto $R_{i_1 \dots i_n}$ é um elipsóide e satisfaz

$$R_{i_1 \dots i_n} = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(R_{i_{k+1}}).$$

Esta construção diz-se uma *construção geométrica* e referimos-nos a J como o *conjunto limite* da construção (ver [3]). Podemos pensar nos conjuntos R_1, \dots, R_p como os elementos de uma partição de Markov de J , apesar de não assumirmos nenhum comportamento exponencial. Supomos também no que se segue que:

1. podemos definir uma função $\chi: \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}} \rightarrow J$ por

$$\chi(i_1 i_2 \dots) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_{i_1 \dots i_n}, \quad (6)$$

i.e., a intersecção em (6) contém um e um só ponto para cada sucessão $(i_1 i_2 \dots) \in \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$;

2. para cada $x = \chi(i_1 i_2 \dots) \in J$ o k -ésimo eixo $L_k(x, n)$ do elipsóide $R_{i_1 \dots i_n}$ satisfaz

$$\Lambda_k^+(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{y \in C_x(\delta, n) \cap L_k(x, n)} \frac{d(f^n x, f^n y)}{d(x, y)},$$

i.e., os eixos de cada elipsóide coincidem com as direcções para as quais o expoente é atingido;

3. para cada $x = \chi(i_1 i_2 \dots) \in J$ as imagens por f de pontos extremos do segmento de recta $R_{i_2 \dots i_n} \cap L_k(fx, n-1)$ são os pontos extremos de $R_{i_1 \dots i_n} \cap L_k(x, n)$.

Notamos que uma vez que os conjuntos R_1, \dots, R_p são disjuntos, temos $R_{i_1 \dots i_n} \cap R_{j_1 \dots j_n} = \emptyset$ sempre que $(i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_n)$ e consequentemente χ é injectiva.

Sob as hipóteses anteriores é fácil verificar (considerando os pontos extremos na condição 3) que

$$\Lambda_k^+(x) \geq \limsup_{\ell \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{a_k(R_{i_{n+1} \dots i_{n+\ell}})}{a_k(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}})} \quad (7)$$

para todos os $x \in J$. Dada uma medida finita f -invariante μ em J e $\alpha \geq 0$ dizemos que J tem *distorção no máximo α relativamente a μ* se

$$\Lambda_k^+(x) \leq \limsup_{\ell \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{a_k(R_{i_{n+1} \dots i_{n+\ell}})}{a_k(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}})} + \alpha \quad (8)$$

para μ -quase todo o ponto $x \in J$.

Podemos verificar-se que se f é uma transformação expansora de classe $C^{1+\varepsilon}$ e adicionalmente se comporta como um produto de transformações conformes com as direcções $L_k(n) = L_k(x, n)$ independentes de x para cada n fixo, então J tem 0-distorção (relativamente a qualquer medida invariante). Este facto é uma consequência da propriedade de distorção limitada em cada direcção $L_k(n)$, no sentido de que existe $M > 0$ tal que se $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in R_{i_1 \dots i_n}$ e $k = 1, \dots, m$ então

$$M^{-1} < \frac{\|df_x^n|L_k(n)\|}{\|df_y^n|L_k(n)\|} < M.$$

Podemos pensar na noção anterior de distorção como uma generalização da propriedade de distorção limitada ao caso diferenciável, com o parâmetro α descrevendo o grau de distorção. O modelo que descrevemos é diferenciável mas esta condição não é necessária. De facto pode mostrar-se que existem transformações não diferenciáveis com

distorção zero. Existem também exemplos de transformações para as quais (7) não é uma identidade.

4. ESTIMATIVAS DE DIMENSÃO

O resultado seguinte usa os expoentes descritos anteriormente para obter estimativas de dimensão para medidas com suporte em conjuntos limite de construções geométricas.

Para cada $t \in [0, m]$ definimos uma sucessão de funções Φ_t em J por

$$\varphi_{n,t} = nt\alpha - n \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} \Lambda_j^+(x, m) - n(t - \lfloor t \rfloor) \Lambda_{\lfloor t \rfloor}^+(x, m),$$

onde

$$\Lambda_k^+(x, n) = \inf \{ \Lambda_k^+(x) : x \in R_{i_1 \dots i_n} \}$$

para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ e $x \in \chi(i_1 i_2 \dots)$.

Teorema 4.1. *Seja J um conjunto f -invariante com distorção no máximo α relativamente a uma medida μ f -invariante em J . Então*

$$\dim_H \mu \leq \inf \{ t \in [0, m] : P_J(\Phi_t) < 0 \}.$$

Demonstração. Seja $t \in [0, m]$ tal que $P_J(\Phi_t) < 0$ e fixemos $\varepsilon \in (0, -P_J(\Phi_t)/2)$. Como tem distorção no máximo- α relativamente a μ conclui-se que para μ -quase todo o $x = \chi(i_1 i_2 \dots) \in J$ existem inteiros positivos $\ell(x)$ e $n(x, \ell)$ tais que se $\ell > \ell(x)$ e $n > n(x, \ell)$ então

$$\Lambda_k^+(x) \leq \frac{1}{n} \log \frac{a_k(R_{i_{n+1} \dots i_{n+\ell}})}{a_k(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}})} + \alpha + \varepsilon,$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} a_k(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}}) &\leq \exp[n(-\Lambda_k^+(x) + \alpha + \varepsilon)] a_k(R_{i_{n+1} \dots i_{n+\ell}}) \\ &\leq \exp[n(-\Lambda_k^+(x, n) + \alpha + \varepsilon)] \text{diam } J. \end{aligned} \tag{9}$$

Consideramos agora o conjunto

$$Q_r = \{x \in J : \ell(x) < r \text{ e } n(x, i) < r \text{ para } i \leq \ell(x)\}.$$

Claramente

$$\bigcup_{r \in \mathbb{N}} Q_r = J \pmod{0}.$$

Fixemos $r \in \mathbb{N}$. Por (9), para cada $x = \chi(i_1 i_2 \dots) \in Q_r$ e $n > r$ temos

$$\begin{aligned}
w_t(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}}) &= a_1(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}}) \dots a_{[t]}(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}}) [a_{[t]+1}(R_{i_1 \dots i_{n+\ell}})]^{t-[t]} \\
&\leq \prod_{j=1}^{[t]} \exp[n(-\Lambda_j^+(x, n) + \alpha + \varepsilon) \text{diam } J] \cdot \\
&\quad \cdot \exp[n(-\Lambda_{[t]+1}^+(x, n) + \alpha + \varepsilon) \text{diam } J]^{t-[t]} \\
&= (\text{diam } J)^t \exp\left[\sum_{j=1}^{[t]} n(-\Lambda_j^+(x, n) + \alpha + \varepsilon) + \right. \\
&\quad \left. + (-n\Lambda_{[t]+1}^+(x, n) + n\alpha + n\varepsilon)(t - [t])\right] \\
&= (\text{diam } J)^t \exp\left[-n \sum_{j=1}^{[t]} \Lambda_j^+(x, n) - n(t - [t])\Lambda_{[t]+1}^+(x, n) + \right. \\
&\quad \left. + t(n\alpha + n\varepsilon)\right] \\
&= (\text{diam } J)^t \exp(\varphi_{n,t}(x) + n\varepsilon t)
\end{aligned} \tag{10}$$

Para cada $\ell \in \mathbb{N}$ denotamos por \mathcal{U}_ℓ a cobertura de J pelos elipsóides $R_{i_1 \dots i_{\ell+1}}$. Pela escolha de ε e atendendo ao facto de que $Q_r \subset J$, temos que

$$M(Q_r, -\varepsilon, \Phi_t) \leq M(J, -\varepsilon, \Phi_t) = 0.$$

Assim, como

$$0 = M(Q_r, -\varepsilon, \Phi_t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\Gamma_n} \sum_{C \in \Gamma_n} \exp(\varepsilon m(C) + \Phi_t(C))$$

existe para cada $\delta > 0$ uma cobertura de Q_r por elipsóides R_{I_1}, \dots, R_{I_N} tais que: I_j tem tamanho $n_j + \ell$ com $n_j > r$ para $j = 1, \dots, N$; $w_t(R_{I_j})^{1/t} \leq \delta$ para $j = 1, \dots, N$ (podemos escolher os n_j 's suficientemente grandes por forma a obter eixos suficientemente pequenos); e

$$\sum_{j=1}^N \exp \varphi_{n_j,t}(R_{I_j}) e^{\varepsilon n_j t} < \delta \tag{11}$$

(basta neste caso escolher ℓ por forma a que $n_j + \ell \geq n_j t$, i.e. $\ell \geq \max_{j \in \{1, \dots, N\}} \{n_j(t-1)\}$). Usando (10) e (11) obtemos

$$\sum_{j=1}^N w_t(R_{I_j}) \leq \sum_{j=1}^N \exp \varphi_{n_j,t}(R_{I_j}) e^{\varepsilon n_j t} (\text{diam } J)^t < \delta \max\{1, (\text{diam } J)^m\}.$$

Como δ é arbitrário obtemos $\mathcal{D}^t(Q_r) = 0$. Segue da Proposição 1.1 que $\dim_H Q_r \leq t$. Deste modo,

$$\dim_H \mu \leq \dim_H \bigcup_{r \in \mathbb{N}} Q_r = \sup_{r \in \mathbb{N}} \dim_H Q_r \leq t$$

sempre que $P_J(\Phi_t) < 0$. Fica assim estabelecido o resultado pretendido. \square

Assume-se agora que existem constantes $c_1, c_2 < 0$ tais que

$$c_1 < \Lambda_k^+(x, n) < c_2$$

para todo o $x \in J$, $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, \dots, m$. Mostra-se neste caso que existe um único número $t \geq 0$ tal que $P_Z(\Phi_t) = 0$. Mais, segue do Teorema 4.1 e da monotonicidade de $t \mapsto P_J(\Phi_t)$ que $\dim_H \mu \leq t$. Definimos agora

$$\Lambda_k^+ = \inf \text{ess} \{ \Lambda_k^+(x) : x \in J \},$$

onde $\inf \text{ess}$ denota o ínfimo essencial. O resultado seguinte é uma simples consequência do Teorema 4.1.

Corolário 4.2. *Se o conjunto f -invariante J tem distorção no máximo α relativamente a uma medida finita μ f -invariante em J então*

$$\dim_H \mu \leq \inf \left\{ t \in [0, m] : \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} \Lambda_j^+ + (t - \lfloor t \rfloor) \Lambda_{\lfloor t \rfloor}^+ > \log p + t\alpha \right\}.$$

Demonstração. Para cada $t \in [0, m]$ define-se uma sucessão de funções constantes $\tilde{\Phi}_t$ em J por

$$\tilde{\varphi}_{n,t}(x) = nt\alpha - n \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} \Lambda_j^+ - n(t - \lfloor t \rfloor) \Lambda_{\lfloor t \rfloor}^+.$$

Temos claramente que $\varphi_{n,t}(x) \leq \tilde{\varphi}_{n,t}(x)$ e consequentemente $P_J(\Phi_t) \leq P_J(\tilde{\Phi}_t)$. Pelo Teorema 4.1 temos $\dim_H \mu \leq t$ sempre que $P_J(\tilde{\Phi}_t) < 0$. Pelo Teorema 1.4 e pela Proposição 1.10 em [3] obtém-se

$$\begin{aligned} P_J(\tilde{\Phi}_t) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} \exp(\tilde{\varphi}_{n,t}(R_{i_1 \dots i_n})) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(p^n \tilde{\varphi}_{n,t}) = \log p + t\alpha - \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} \Lambda_j^+ - (t - \lfloor t \rfloor) \Lambda_{\lfloor t \rfloor}^+, \end{aligned}$$

e logo

$$\sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} \Lambda_j^+ + (t - \lfloor t \rfloor) \Lambda_{\lfloor t \rfloor}^+ < \log p + t\alpha.$$

Temos imediatamente o resultado pretendido. \square

REFERÊNCIAS

1. L. Barreira e Ya. Pesin, *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, University Lecture Series 21, American Mathematical Society, 2002.
2. L. Barreira e C. Silva, *Lyapunov Exponents for continuous transformations and dimension theory*, preprint.

3. L. Barreira, *A non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), 871–927.
4. A. Douady and J. Oesterlé, *Dimension de Hausdorff des atracteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris **278** (8980), 1135–1158.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR, RUA
MARQUÊS D'ÁVILA E BOLAMA, 6201-001 COVILHÃ
E-mail address: csilva@noe.ubi.pt