

EXPOENTES DE LYAPUNOV E TEOREMA ERGÓDICO MULTIPLICATIVO

CÉSAR SILVA

RESUMO. Introduz-se o conceito de expoente de Lyapunov no caso de transformações diferenciáveis e discutem-se alguns aspectos da estrutura que surge com a introdução deste conceito. Em particular enuncia-se o teorema ergódico multiplicativo na versão clássica e para transformações não invertíveis. Apresenta-se de seguida uma noção de expoente de Lyapunov para transformações não necessariamente diferenciáveis e mostra-se que numa classe alargada de repulsores de conjuntos hiperbólicos os dois conceitos coincidem.

1. EXPOENTES CLÁSSICOS E TEOREMA ERGÓDICO MULTIPLICATIVO

Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com inversa diferenciável. Temos

$$|(f^n)'(x)| = \left| \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) \right| = \prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))|.$$

Deste modo,

$$\frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \frac{1}{n} \log \prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(f^k(x))|.$$

Relembra-se o seguinte resultado

Teorema 1.1 (Teorema ergódico de Birkhoff). *Dada $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de $L^1(X, \mu)$ em que μ é uma medida de probabilidade f -invariante, temos que para μ -quase todo o ponto $x \in X$ existe o limite*

$$\phi^*(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \phi(f^k(x)).$$

Além disso $\phi^* \in L^1(X, \mu)$, é f -invariante e satisfaz

$$\int_X \phi d\mu = \int_X \phi^* d\mu.$$

O teorema ergódico de Birkhoff mostra que se $\log |f'| \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(f^k(x))| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)|$$

existe para μ -quase todo o ponto.

Tentemos generalizar para uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Neste caso temos dois problemas:

1. $\|df_x^n\| \leq \prod_{k=0}^{n-1} \|df_{f^k x}\|$ não é uma igualdade.
2. $\|df_x^n v\| = \|df_{f^{n-1}x} \cdot df_{f^{n-2}x} \dots df_x v\| \leq \|df_{f^{n-1}x}\| \cdot \|df_{f^{n-2}x}\| \dots \|df_x v\|$.
Temos muitas direcções mas só a norma correspondente a df_x reflecte este facto.

Definimos o conceito de expoente de Lyapunov da seguinte forma: dada uma função diferenciável $f : M \rightarrow M$ (supomos por simplicidade que M é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m) definimos o *expoente de Lyapunov (superior)* do par $(x, v) \in M \times T_x M$ por

$$\lambda^+(x, v) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n v\|.$$

Por uma questão de normalização e de forma a incluir o vector nulo na definição fazemos $\lambda^+(x, 0) = -\infty$.

Observação 1.2. *Dada uma transformação invertível $f : M \rightarrow M$ com inversa diferenciável podemos também definir o expoente de Lyapunov inferior (i.e. para tempo negativo) do par $(x, v) \in M \times T_x M$ por*

$$\lambda^-(x, v) = \limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{|n|} \log \|df_x^n v\|.$$

A seguinte proposição fornece algumas propriedades fundamentais do expoente superior.

Proposição 1.1. *Para $x \in M$, $v, w \in T_x M$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos*

1. $\lambda^+(x, \alpha v) = \lambda^+(x, v)$;
2. $\lambda^+(x, v + w) \leq \max\{\lambda^+(x, v), \lambda^+(x, w)\}$;
3. se $\lambda^+(x, v) \neq \lambda^+(x, w)$ então $\lambda^+(x, v + w) = \max\{\lambda^+(x, v), \lambda^+(x, w)\}$.

Demonstração. Sejam $x \in M$, $v, w \in T_x M$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos

$$\begin{aligned} \lambda^+(x, \alpha v) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n(\alpha v)\| = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (|\alpha| \|df_x^n v\|) \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n v\| = \lambda^+(x, v), \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação 1.

Observe-se agora que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \log \|df_x^n(v+w)\| &\leq \frac{1}{n} \log (\|df_x^n v\| + \|df_x^n w\|) \\
 &\leq \frac{1}{n} \log (2 \max\{\|df_x^n v\|, \|df_x^n w\|\}) \\
 &\leq \frac{1}{n} (\log 2 + \log \max\{\|df_x^n v\|, \|df_x^n w\|\}) \\
 &\leq \frac{1}{n} \log 2 + \max\left\{\frac{1}{n} \log \|df_x^n v\|, \frac{1}{n} \log \|df_x^n w\|\right\}.
 \end{aligned}$$

Calculando \limsup estabelece-se 2, atendendo a que para duas sucessões a_n e b_n temos

$$\max\{\limsup a_n, \limsup b_n\} = \limsup \max\{a_n, b_n\}.$$

Suponhamos seguidamente, sem perda de generalidade, que $\lambda^+(x, v) > \lambda^+(x, w)$. Atendendo a (2) temos que

$$\begin{aligned}
 \lambda^+(x, v+w) &\leq \lambda^+(x, v) = \lambda^+(x, w+v-w) \\
 &\leq \max\{\lambda^+(x, v+w), \lambda^+(x, w)\}.
 \end{aligned}$$

Observa-se então que se $\max\{\lambda^+(x, v+w), \lambda^+(x, v)\} = \lambda^+(x, v)$ obteríamos uma contradição. Conclui-se então que $\max\{\lambda^+(x, v+w), \lambda^+(x, v)\} = \lambda^+(x, v+w)$. Obtemos portanto

$$\lambda^+(x, v+w) \leq \lambda^+(x, v) \leq \lambda^+(x, v+w),$$

o que mostra (3) e conclui a demonstração. \square

O resultado seguinte começa a caracterizar a estrutura introduzida pelos expoentes de Lyapunov.

Teorema 1.3. *Para cada $x \in M$ existem um número inteiro positivo $s^+(x) \leq \dim M$, números reais $\lambda_1^+(x) < \dots < \lambda_{s^+(x)}^+(x)$ e espaços lineares $\{0\} = V_0^+(x) \subset V_1^+(x) \subset \dots \subset V_{s^+(x)}^+(x) = T_x M$ tais que, para cada $i = 1, \dots, s^+(x)$, temos*

$$V_i^+(x) = \{v \in T_x M : \lambda^+(x, v) \leq \lambda_i^+(x)\}$$

e se $v \in V_i^+(x) \setminus V_{i-1}^+(x)$ então $\lambda^+(x, v) = \lambda_i^+(x)$.

Demonstração. Vamos mostrar que se $\lambda(x, v_1), \dots, \lambda(x, v_k)$ são distintos então os vectores $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ são linearmente independentes. Suponhamos que eram linearmente dependentes. Então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, não todos nulos, tais que $\alpha_1.v_1 + \dots + \alpha_k.v_k = 0$. Temos então

$$\begin{aligned}
 -\infty &= \lambda^+(x, 0) = \lambda^+(x, \alpha_1.v_1 + \dots + \alpha_k.v_k) \\
 &= \max\{\lambda^+(x, v_i) : 1 \leq i \leq k \text{ e } \alpha_i \neq 0\} \neq -\infty,
 \end{aligned}$$

uma vez que por hipótese os $\lambda^+(x, v_i)$ são todos distintos e existem pelo menos dois α_i 's não nulos. Chegamos assim a uma contradição. Concluimos portanto que os vectores são linearmente independentes.

Portanto, existem no máximo $m = \dim M$ valores (diferentes de $-\infty$) distintos para $\lambda^+(x, \cdot)$.

Sejam então $\lambda_1^+(x) < \dots < \lambda_{s^+(x)}^+(x)$, $s^+(x) \leq \dim M$, os valores distintos que $\lambda^+(x, \cdot)$ pode assumir. Definindo

$$V_i^+(x) = \{v \in T_x M : \lambda^+(x, v) \leq \lambda_i^+(x)\},$$

concluimos que $\{0\} \not\subseteq V_1^+(x) \not\subseteq \dots \not\subseteq V_{s^+(x)}^+(x) = T_x M$. Deste modo, se $v \in V_i^+(x) \setminus V_{i-1}^+(x)$ temos que $\lambda_{i-1}^+(x) < \lambda(x, v) \leq \lambda_i^+(x)$. Como $\lambda(x, v)$ não pode assumir nenhum valor em $]\lambda_{i-1}^+(x), \lambda_i^+(x)[$ conclui-se que $\lambda(x, v) = \lambda_i^+(x)$. \square

Se $f : M \rightarrow M$ for um difeomorfismo temos um resultado análogo. Concretamente temos o resultado seguinte.

Teorema 1.4. *Para cada $x \in M$ existem um número inteiro positivo $s^-(x) \leq \dim M$, números reais $\lambda_1^-(x) > \dots > \lambda_{s^-(x)}^-(x)$ e espaços lineares $T_x M = V_1^-(x) \not\subseteq \dots \not\subseteq V_{s^-(x)+1}^-(x) = \{0\}$ tais que, para cada $i = 1, \dots, s^-(x) + 1$, temos*

$$V_i^-(x) = \{v \in T_x M : \lambda^-(x, v) \leq \lambda_i^-(x)\}$$

e se $v \in V_i^-(x) \setminus V_{i-1}^-(x)$ então $\lambda^-(x, v) = \lambda_i^-(x)$.

Demonstração. Paralela à demonstração do Teorema 1.3. \square

Dado um difeomorfismo seria interessante compreender que relação existe entre os números $s^+(x)$ e $s^-(x)$. Serão iguais sob determinadas condições?

Seria também interessante saber o que podemos dizer sobre a estrutura dos conjuntos $V_i^+(x)$ e $V_i^-(x)$.

Começamos por fazer uma definição.

Definição 1.5. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Um ponto $x \in M$ diz-se Lyapunov regular (ou simplesmente regular) em relação a f se se verificarem as seguintes condições:*

1. $s^+(x) = s^-(x) \stackrel{\text{def}}{=} s(x)$;
2. existe uma decomposição

$$T_x M = \bigoplus_{i=1}^{s(x)} H_i(x),$$

onde

$$V_i^+(x) = \bigoplus_{j=1}^i H_j(x) \quad e \quad V_i^-(x) = \bigoplus_{j=i}^{s(x)} H_j(x)$$

para cada $i = 1, \dots, s(x)$;

3. para cada $v \in H_i(x) \setminus \{0\}$ temos

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|m|} \log \|df_x^m v\| = \lambda_i^+(x) = -\lambda_i^-(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i(x),$$

com convergência uniforme em $\{v \in H_i(x) : \|v\| = 1\}$;

4.

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{m} \log |\det df_x^m| = \sum_{i=1}^{s(x)} \lambda_i(x) \dim H_i(x). \quad (1)$$

A condição 1. exige que tenhamos o mesmo número de valores distintos para $\lambda^+(x, v)$ e $\lambda^-(x, v)$. As condições 2. e 3. exigem em particular que exista uma decomposição do espaço tangente numa soma directa de subespaços tal que o valor do expoente superior calculado em cada vector não nulo do subespaço $H_i(x)$ seja sempre o mesmo e seja ainda igual ao simétrico do valor correspondente para o expoente inferior. A condição 4. diz essencialmente respeito ao comportamento dos ângulos entre os espaços $H_i(x)$.

A noção de ponto regular corresponde a uma exigência considerável da estrutura proveniente dos expoentes de Lyapunov λ^+ e λ^- , no entanto, do ponto de vista da teoria da medida, com condições de integrabilidade muito gerais, pode verificar-se que existem muitos pontos regulares.

Seja μ uma medida finita em M . Denotamos por $L^1(M, \mu)$ o conjunto das funções μ -integráveis em M . Define-se ainda, para cada $a \geq 0$, o número $\log^+ a = \max\{\log a, 0\}$. Temos o seguinte resultado devido a Oseledets.

Teorema 1.6 (Teorema Ergódico Multiplicativo). *Se $f : M \rightarrow M$ é uma transformação diferenciável com inversa diferenciável e μ é uma medida finita f -invariante em M com $\log^+ \|df\|, \log^+ \|df^{-1}\| \in L^1(M, \mu)$ então μ -quase todo o ponto é regular.*

Demonstração. Pode ver-se uma demonstração deste resultado em [?] \square

Existe também uma versão do teorema anterior para o caso de transformações que não são necessariamente invertíveis.

Teorema 1.7. *Se $f : M \rightarrow M$ é uma transformação diferenciável e μ é uma medida finita f -invariante em M com $\log^+ \|df\| \in L^1(M, \mu)$ então para μ -quase todo o ponto $x \in M$ temos*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|df_x^m v\| = \lambda_i^+(x)$$

para cada $i = 1, \dots, s^+(x)$ com convergência uniforme em qualquer subespaço $F \subset V_i^+(x)$ tal que $F \cap V_{i-1}^+(x) = 0$ e além disso

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log |\det df_x^m| = \sum_{i=1}^{s^+(x)} \lambda_i^+(x) \dim k_i^+(x). \quad (2)$$

Demonstração. A demonstração deste resultado está contida quase na totalidade na demonstração do Teorema ergódico multiplicativo. A parte da demonstração que requer ideias novas diz apenas respeito à convergência uniforme. \square

2. EXPOENTES PARA TRANSFORMAÇÕES NÃO NECESSARIAMENTE DIFERENCIÁVEIS

Dadas uma transformação (não necessariamente diferenciável) $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e uma métrica d em \mathbb{R}^m definimos para cada $x \in \mathbb{R}^m$ e $k \in \{1, \dots, m\}$ o número

$$\Lambda_k^+(x) = \inf_{L \in L_{x,k}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{y \in C_x(\delta, n) \cap L} \frac{d(f^n x, f^n y)}{d(x, y)}, \quad (3)$$

onde $L_{x,k}$ denota a família de conjuntos da forma $x + F$ para algum subespaço $F \subset \mathbb{R}^m$ de dimensão k e

$$C_x(\delta, n) = \{y \in B_x(\delta, n) \setminus \{x\} : [f^j x, f^j y] \subset f^j B_x(\delta, n) \text{ para } j \in \{0, \dots, n\}\};$$

onde

$$B_x(\delta, n) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(f^j x, f^j y) < \delta \text{ para } j \in \{0, \dots, n\}\}, \quad (4)$$

e $[v, w] \subset \mathbb{R}^m$ denota o segmento de recta entre v and w . Designamos os números

$$\Lambda_1^+(x) \leq \Lambda_2^+(x) \leq \dots \leq \Lambda_m^+(x)$$

por *expoentes de Lyapunov superiores* de f no ponto x . Estes números desempenham o papel dos expoentes de Lyapunov para transformações não diferenciáveis. Observamos que os valores dos expoentes ficam inalterados substituindo d por uma métrica equivalente em \mathbb{R}^m .

Podemos também definir de forma semelhante um “expoente inferior” para transformações invertíveis não necessariamente diferenciáveis. Concretamente

$$\Lambda_k^-(x) = \inf_{L \in L_{x,k}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|n|} \log \sup_{y \in C_x(\delta, n) \cap L} \frac{d(f^n x, f^n y)}{d(x, y)}, \quad (5)$$

onde $L_{x,k}$ se define como anteriormente e alteramos um pouco as definições de $B_x(\delta, n)$ e $C_x(\delta, n)$ sem no entanto mudar a designação uma vez que a versão adequada fica determinada pelo expoente em causa. Assim, no caso do expoente $\Lambda_k^-(x)$ definimos para cada $\delta > 0$ e cada inteiro negativo n os conjuntos

$$C_x(\delta, n) = \{y \in B_x(\delta, n) \setminus \{x\} : [f^j x, f^j y] \subset f^j B_x(\delta, n) \text{ para } j \in \{n, \dots, 0\}\};$$

onde

$$B_x(\delta, n) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(f^j x, f^j y) < \delta \text{ para } j \in \{n, \dots, 0\}\}, \quad (6)$$

e $[v, w] \subset \mathbb{R}^m$ se define como anteriormente. Designamos os números

$$\Lambda_1^-(x) \geq \Lambda_2^-(x) \geq \dots \geq \Lambda_m^-(x)$$

por *expoentes de Lyapunov inferiores* de f no ponto x .

Gostaríamos agora de obter condições sob as quais temos igualdade entre os dois conceitos de expoente. A partir de agora f é uma transformação diferenciável. Começo por introduzir alguns conceitos.

Definição 2.1. *Se $J \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto compacto f -invariante (i.e. tal que $f^{-1}J = J$) dizemos que f é uma transformação expansora (diferenciável) em J e que J é um repulsor de f se existem constantes $C > 0$ e $a > 1$ tais que $\|d_x g^n v\| \geq Ca^n \|v\|$, para todos os $x \in J$, $v \in \mathbb{R}^m$ e $n \in \mathbb{N}$.*

É imediato que uma transformação expansora diferenciável é um homeomorfismo local em cada ponto. Temos também a definição.

Definição 2.2. *Seja $\alpha \in (0, 1]$. Dizemos que f tem derivada α -limitada no conjunto $J \subset \mathbb{R}^m$ se df_x for invertível e*

$$\|(df_x)^{-1}\|^{1+\alpha} \|df_x\| < 1$$

para todo o $x \in J$.

Temos os seguintes exemplos de transformações com derivada α -limitada.

Exemplo 2.3. *Consideremos a transformação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $fx = Ax$, onde*

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

com $|n| > |m| > 1$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Nesta família de transformações podemos facilmente determinar elementos com derivada α -limitada. De facto, basta notar que

$$\|(d_x f)^{-1}\|^{1+\alpha} \|d_x f\| = |m|^{-(1+\alpha)} |n|,$$

e portanto, fazendo $|n| < |m|^{1+\alpha}$, obtemos transformações com derivada α -limitada.

Podemos transportar este exemplo para transformações em \mathbb{R}^n . Nomeadamente temos a seguinte generalização.

Consideremos a transformação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $fx = Ax$, onde todos os valores próprios da matriz A são distintos e tem módulo maior que um. Temos que

$$\|(d_x f)^{-1}\|^{1+\alpha} \|d_x f\| = (\min_i |\lambda_i|)^{-1-\alpha} \max_i |\lambda_i|.$$

Assim, escolhendo os números λ_i de modo que $\max_i |\lambda_i| < (\min_i |\lambda_i|)^{-1-\alpha}$, obtemos transformações com derivada α -limitada.

Os exemplos anteriores dão origem a muitos outros notando simplesmente que qualquer perturbação C^1 de f (que corresponde a uma pequena variação de f e das suas derivadas) tem ainda derivada α -limitada.

Relembro que uma transformação se diz de classe $C^{1+\alpha}$ se for Hölder com expoente α .

Denotamos por $\rho_k^+(x)$, $k = 1, \dots, m$ ($m = \dim M$) os valores do expente de Lyapunov contados com as respectivas multiplicidades, i.e., tais que

$$\rho_{\dim V_{i-1}^+(x)+1}(x) = \dots = \rho_{\dim V_i^+(x)}(x) = \lambda_i^+(x).$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação de classe $C^{1+\alpha}$ com um repulsor compacto f -invariante J no qual tem derivada α -limitada e seja μ uma medida finita f -invariante em J . Então $\Lambda_k^+(x) = \rho_k^+(x)$ para μ -quase todo o ponto $x \in J$ e $k = 1, \dots, m$.*

Demonstração. A desigualdade

$$\Lambda_k^+(x) \geq \inf_{\dim F=k} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\|df_x^n v\|}{\|v\|} \equiv c_k^+(x) = \rho^+(x)$$

\uparrow
 $\mu - \text{q.t.p}$

é relativamente simples de obter. Usa-se a diferenciabilidade de f para majorar uma determinada razão incremental (que no limite nos dá a norma da derivada na definição de $c_k^+(x)$) pelo supremo de outra razão incremental, num conjunto adequado. Para estabelecer a igualdade $c_k^+(x) = \rho_k^+(x)$, válida num conjunto de medida total, usa-se o Teorema ergódico multiplicativo para transformações não invertíveis. É aqui essencial a convergência uniforme.

A outra desigualdade é mais complicada. Mostra-se de seguida que

$$\Lambda_k^+(x) \leq c_k^+(x) = \rho^+(x)$$

\uparrow
 $\mu - \text{q.t.p}$

Seja $\delta = \delta(x) > 0$ tal que f é um difeomorfismo em $B_x(\delta)$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $B_x(\delta, n) \subset B_x(\delta)$, f é também um difeomorfismo local em $B_x(\delta, n)$.

Seja $y \in C_x(\delta, n+1)$ e $j \in \{0, \dots, n\}$. Temos

$$\begin{aligned}
& df_y^{j+1}(df_x^{j+1})^{-1} \\
&= df_{fy}^j df_y (df_x)^{-1} (df_{fx}^j)^{-1} \\
&= df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1} + df_{fy}^j df_y (df_x)^{-1} (df_{fx}^j)^{-1} \\
&\quad - df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1} \\
&= df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1} + df_{fy}^j df_y (df_x)^{-1} (df_{fy}^j)^{-1} df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1} \\
&\quad - df_{fy}^j (df_{fy}^j)^{-1} df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1} \\
&= [I + df_{fy}^j df_y (df_x)^{-1} (df_{fy}^j)^{-1} - df_{fy}^j (df_{fy}^j)^{-1}] df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1} \\
&= [I + df_{fy}^j (df_y (df_x^{-1}) - I) (df_{fy}^j)^{-1}] df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1}.
\end{aligned}$$

Conclui-se que,

$$\begin{aligned}
\frac{\|df_y^{j+1}(df_x^{j+1})^{-1}\|}{\|df_{fy}^j (df_{fx}^j)^{-1}\|} &\leq 1 + \|df_{fy}^j\| \cdot \|(df_y (df_x)^{-1} - I)\| \cdot \|(df_{fy}^j)^{-1}\| \\
&\leq 1 + C_1 \|df_{fy}^j\| \cdot \|df_y - df_x\| \cdot \|(df_{fy}^j)^{-1}\| \\
&\uparrow C_1 = \max\{\|(df_y)^{-1}\| : y \in J\} \\
&\leq 1 + C_2 \|df_{fy}^j\| \cdot \|y - x\|^\alpha \cdot \|(df_{fy}^j)^{-1}\|, \\
&\uparrow C^{1+\alpha}, i.e., derivada Hölder com expoente α
\end{aligned} \tag{7}$$

Vamos agora estudar os termos à direita da desigualdade.

$$\|y - x\| = \|h_j(f^j y) - h_j(f^j x)\| \leq \|d(h_j)_z\| \cdot \|f^j y - f^j x\|, \tag{8}$$

onde h_j é a inversa local de f^j e onde z é um ponto no segmento de recta entre $f^j y$ e $f^j x$ e logo em $f^j B_x(\delta, n+1)$, pela definição de $C_x(\delta, n+1)$. Assim

$$f^\ell h_j z \in f^\ell B_x(\delta, n+1) \subset B_{f^\ell x}(\delta) \tag{9}$$

para $\ell = 0, \dots, j$.

Como a derivada de f é α -limitada em J e J é compacto, existem $\lambda < 1$ suficientemente grande e δ suficientemente pequeno tais que

$$\|(df_z)^{-1}\|^{1+\alpha} \|df_z\| < \lambda$$

para todo o z numa vizinhança- δ de J , J_δ . Seja agora $\beta > 0$ tal que $e^{\alpha\beta}\lambda < 1$. Fazendo de novo δ suficientemente pequeno podemos assumir que, se $v, w \in J_\delta$ e $d(v, w) < 2\delta$ se tem

$$|\log \|(df_v)^{-1}\| - \log \|(df_w)^{-1}\|| \leq \beta.$$

Basta notar que J é compacto e $v \mapsto \log \|(df_v)^{-1}\|$ é contínua. Temos assim

$$\|(df_{f^\ell h_j z})^{-1}\| \leq e^\beta \|(df_{f^\ell y})^{-1}\|, \tag{10}$$

para $\ell = 0, \dots, n$.

Desta forma, visto que $d(h_j)_z = (df_{h_j z}^j)^{-1}$ temos que

$$\|d(h_j)_z\| = \|(df_{h_j z}^j)^{-1}\| \leq \prod_{\ell=0}^{j-1} \|(df_{f^\ell h_j z})^{-1}\| \leq C_3 e^{\beta j} \prod_{\ell=1}^j \|(df_{f^\ell y})^{-1}\|,$$

onde

$$C_3 = \sup_{w \in J_\delta} \|(df_w)^{-1}\| / \inf_{w \in J_\delta} \|(df_w)^{-1}\|.$$

Obtemos

$$\|y - x\|^\alpha \leq \delta^\alpha \|d(h_j)_z\|^\alpha \leq C_3^\alpha \delta^\alpha e^{\alpha\beta j} \prod_{\ell=1}^j \|(df_{f^\ell y})^{-1}\|^\alpha. \quad (11)$$

Deste modo

$$\|df_{f y}^j\| \|(df_{f y}^j)^{-1}\| \leq \prod_{\ell=1}^j (\|df_{f^\ell y}\| \cdot \|(df_{f^\ell y})^{-1}\|). \quad (12)$$

$$\uparrow \text{Regra da composta} \quad (13)$$

Conclui-se que

$$\|y - x\|^\alpha \leq C_3^\alpha \delta^\alpha e^{\alpha\beta j} \lambda^j = C_3^\alpha \delta^\alpha (e^{\alpha\beta} \lambda)^j.$$

\uparrow Derivada α -limitada

Assim, para $x \in J$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in C_x(\delta, n+1)$ e $j \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \|df_y^{j+1}(df_x^{j+1})^{-1}\| &\leq \|df_y^j(df_x^j)^{-1}\| (1 + C\gamma^j) \\ &\leq \prod_{j=1}^n (1 + C\gamma^j) < \prod_{j=1}^{+\infty} (1 + C\gamma^j) \equiv \tau \end{aligned}$$

\uparrow Repetir processo

Dada uma transformação linear A , define-se para cada subespaço $F \subset \mathbb{R}^m$,

$$\|A\|_F = \sup_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

Deste modo, dadas transformações lineares A e B , temos

$$\|BA\|_F = \sup_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\|BAv\|}{\|v\|} \leq \|B\| \cdot \|A\|_F.$$

Fazendo então $A = df_x^n$ e $B = df_y^n(df_x^n)^{-1}$ conclui-se que

$$\|df_y^n\|_F \leq \|df_y^n(df_x^n)^{-1}\| \|df_x^n\|_F \leq \tau \|df_x^n\|_F$$

para $x \in J$, $n \in \mathbb{N}$ e $y \in C_x(\delta, n)$. Seja agora $w = y - x \in F$. Então

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^n y) &\leq \int_0^1 \|df_{x+tw}^n\|_F dt \\ &\leq \sup_{z \in C_x(\delta, n) \cap (x+F)} \|df_z^n\|_F d(x, y) \leq \tau \|df_x^n\|_F d(x, y). \end{aligned}$$

Temos portanto que

$$\frac{d(f^n x, f^n y)}{d(x, y)} \leq \tau \|df_x^n\|_F,$$

pelo que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{y \in C_x(\delta, n) \cap (x+F)} \frac{d(f^n x, f^n y)}{d(x, y)} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n\|_F,$$

e logo

$$\Lambda_k^+(x) \leq \inf_{\dim F=k} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df_x^n\|_F = c_k^+(x).$$

A demonstração fica concluída notando que, como foi referido no início, $c_k^+(x) = \rho_k^+(x)$ num conjunto de medida total. \square

Existe ainda uma versão do teorema anterior para conjuntos hiperbólicos.

Teorema 2.5. *Seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ com um conjunto hiperbólico compacto f -invariante Λ tal que*

$$\|df_x|_{E^s(x)}\|^{1+\alpha} \|(df_x|_{E^s(x)})^{-1}\| < 1 \quad e \quad \|(df_x|_{E^u(x)})^{-1}\|^{1+\alpha} \|df_x|_{E^u(x)}\| < 1 \quad (14)$$

para todo o $x \in \Lambda$. Seja ainda μ uma medida finita f -invariante em Λ . Então

$$\Lambda_k^+(x) = \rho_k^+(x) = -\rho_k^-(x) = -\Lambda_k^-(x)$$

para μ -quase todo o ponto $x \in \Lambda$ e $k = 1, \dots, m$.

Demonstração. A demonstração utiliza técnicas semelhantes à demonstração anterior. \square

Este teorema é natural atendendo a que temos uma condição semelhante à condição de derivada α -limitada na direcção onde temos contracção e na direcção onde temos expansão.

REFERÊNCIAS

1. L. Barreira and Ya. Pesin, *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, University Lecture Series 23, American Mathematical Society, 2007.
2. L. Barreira e C. Silva, *Lyapunov Exponents for continuous transformations and dimension theory*, preprint.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR, RUA MARQUÊS D'ÁVILA E BOLAMA, 6201-001 COVILHÃ
 E-mail address: csilva@noe.ubi.pt