

Existência e regularidade de variedades invariantes estáveis para perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes

César Silva

Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior

Universidade do Porto, 11 de Abril de 2008

Regularidade de variedades estáveis: contexto

Objectivo: estabelecer a regularidade óptima das variedades invariantes estáveis para uma família de perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Regularidade de variedades estáveis: contexto

Objectivo: estabelecer a regularidade óptima das variedades invariantes estáveis para uma família de perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Consideramos a dinâmica dada por

$$v_{n+1} = F_n(v_n), \quad \text{com} \quad F_n = A_n + f_n$$

onde

- A_n são matrizes $k \times k$ invertíveis

Regularidade de variedades estáveis: contexto

Objectivo: estabelecer a regularidade óptima das variedades invariantes estáveis para uma família de perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Consideramos a dinâmica dada por

$$v_{n+1} = F_n(v_n), \quad \text{com} \quad F_n = A_n + f_n$$

onde

- A_n são matrizes $k \times k$ invertíveis
- $f_n: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ são transformações de classe C^r com $f_n(0) = 0$ tais que, para algumas constantes $c > 0$ e $q > r$,

$$\|d_u^j f_n - d_v^j f_n\| \leq c \|u - v\| (\|u\|^{q-j} + \|v\|^{q-j})$$

para quaisquer $j = 0, \dots, r-1$, $n \in \mathbb{N}$ e $u, v \in \mathbb{R}^k$

Regularidade de variedades estáveis: definições

Definem-se:

$$\mathcal{A}(m, n) = \begin{cases} A_{m-1} \cdots A_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ A_m^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}, \quad \mathcal{F}(m, n) = \begin{cases} F_{m-1} \circ \cdots \circ F_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ F_m^{-1} \circ \cdots \circ F_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}$$

Regularidade de variedades estáveis: definições

Definem-se:

$$\mathcal{A}(m, n) = \begin{cases} A_{m-1} \cdots A_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ A_m^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}, \quad \mathcal{F}(m, n) = \begin{cases} F_{m-1} \circ \cdots \circ F_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ F_m^{-1} \circ \cdots \circ F_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}$$

A sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma *dicotomia exponencial não-uniforme* se existem constantes $a < 0 \leq b$, $\varepsilon \geq 0$ e $D \geq 1$ e projecções P_n tais que

$$P_m \mathcal{A}(m, n) = \mathcal{A}(m, n) P_n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

e dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$ temos, sendo $Q_m = \text{Id} - P_m$

$$\|\mathcal{A}(m, n) P_n\| \leq D e^{a(m-n) + \varepsilon n} \quad \text{e} \quad \|\mathcal{A}(m, n)^{-1} Q_m\| \leq D e^{-b(m-n) + \varepsilon m}$$

Regularidade de variedades estáveis: definições

Definem-se:

$$\mathcal{A}(m, n) = \begin{cases} A_{m-1} \cdots A_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ A_m^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}, \quad \mathcal{F}(m, n) = \begin{cases} F_{m-1} \circ \cdots \circ F_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ F_m^{-1} \circ \cdots \circ F_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}$$

A sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma *dicotomia exponencial não-uniforme* se existem constantes $a < 0 \leq b$, $\varepsilon \geq 0$ e $D \geq 1$ e projecções P_n tais que

$$P_m \mathcal{A}(m, n) = \mathcal{A}(m, n) P_n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

e dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$ temos, sendo $Q_m = \text{Id} - P_m$

$$\|\mathcal{A}(m, n) P_n\| \leq D e^{a(m-n) + \varepsilon n} \quad \text{e} \quad \|\mathcal{A}(m, n)^{-1} Q_m\| \leq D e^{-b(m-n) + \varepsilon m}$$

Definimos:

$$E_n = P_n(\mathbb{R}^k) \quad \text{e} \quad E'_n = Q_n(\mathbb{R}^k)$$

Regularidade de variedades estáveis: definições

Definimos

$$\beta = \varepsilon(1 + 2/q)$$

Para $\delta > 0$ fixo designamos por \mathcal{X}_β o espaço das sucessões de funções $\varphi_n: B_n(\delta e^{-\beta n}) \subset E_n \rightarrow E'_n$ tais que

- $\varphi_n(0) = 0$;
- $\forall x, y \in B_n(\delta e^{-\beta n}), \quad \|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)\| \leq \|x - y\|$

Regularidade de variedades estáveis: definições

Definimos

$$\beta = \varepsilon(1 + 2/q)$$

Para $\delta > 0$ fixo designamos por \mathcal{X}_β o espaço das sucessões de funções $\varphi_n: B_n(\delta e^{-\beta n}) \subset E_n \rightarrow E'_n$ tais que

- $\varphi_n(0) = 0$;
- $\forall x, y \in B_n(\delta e^{-\beta n}), \quad \|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)\| \leq \|x - y\|$

Dado $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}_\beta$, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos os gráficos

$$\mathcal{V}_n = \{(\xi, \varphi_n(\xi)) : \xi \in B_n(\delta e^{-\beta n})\}$$

$$\mathcal{V}'_n = \{(\xi, \varphi_n(\xi)) : \xi \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})\} \subset \mathcal{V}_n$$

Teorema 1 (L. Barreira e C. Valls)

Seja $r = 1$. Se a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$, $a + \beta < 0$ e $a + \varepsilon < b$, então:

- 1. existe $\delta > 0$ e uma única sucessão de funções $\varphi \in \mathcal{X}_\beta$ satisfazendo $\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}'_n) \subset \mathcal{V}_m$ para todo o $m \geq n$;

Teorema 1 (L. Barreira e C. Valls)

Seja $r = 1$. Se a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$, $a + \beta < 0$ e $a + \varepsilon < b$, então:

- 1 existe $\delta > 0$ e uma única sucessão de funções $\varphi \in \mathcal{X}_\beta$ satisfazendo $\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}'_n) \subset \mathcal{V}_m$ para todo o $m \geq n$;
- 2 \mathcal{V}'_n é uma variedade diferencial de classe C^1 com $T_0 \mathcal{V}'_n = E_n$;

Teorema 1 (L. Barreira e C. Valls)

Seja $r = 1$. Se a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$, $a + \beta < 0$ e $a + \varepsilon < b$, então:

- ❶ existe $\delta > 0$ e uma única sucessão de funções $\varphi \in \mathcal{X}_\beta$ satisfazendo $\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}'_n) \subset \mathcal{V}_m$ para todo o $m \geq n$;
- ❷ \mathcal{V}'_n é uma variedade diferencial de classe C^1 com $T_0 \mathcal{V}'_n = E_n$;
- ❸ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\xi \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$,

$$\varphi_n(\xi) = - \sum_{l=n}^{\infty} \mathcal{A}(l+1, n)^{-1} Q_{l+1} f_l(\mathcal{F}(l, n)(\xi, \varphi_n(\xi)));$$

Teorema 1 (L. Barreira e C. Valls)

Seja $r = 1$. Se a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$, $a + \beta < 0$ e $a + \varepsilon < b$, então:

- ❶ existe $\delta > 0$ e uma única sucessão de funções $\varphi \in \mathcal{X}_\beta$ satisfazendo $\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}'_n) \subset \mathcal{V}_m$ para todo o $m \geq n$;
- ❷ \mathcal{V}'_n é uma variedade diferencial de classe C^1 com $T_0 \mathcal{V}'_n = E_n$;
- ❸ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\xi \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$,

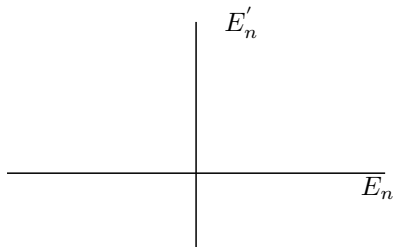
$$\varphi_n(\xi) = - \sum_{l=n}^{\infty} A(l+1, n)^{-1} Q_{l+1} f_l(\mathcal{F}(l, n)(\xi, \varphi_n(\xi)));$$

- ❹ dados $m \geq n$ e $\xi, \bar{\xi} \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$ temos

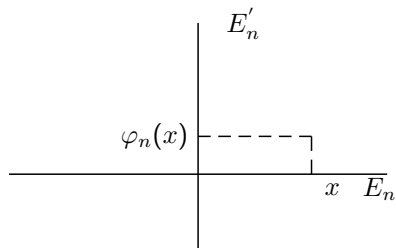
$$\max\{\|P_m v(m, n)\|, \|Q_m v(m, n)\|\} \leq 2De^{a(m-n)+\varepsilon n} \|\xi - \bar{\xi}\|,$$

onde $v(m, n) = \mathcal{F}(m, n)(\xi, \varphi_n(\xi)) - \mathcal{F}(m, n)(\bar{\xi}, \varphi_n(\bar{\xi}))$.

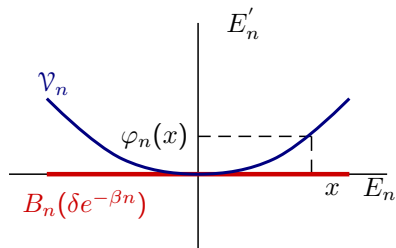
Regularidade das variedades



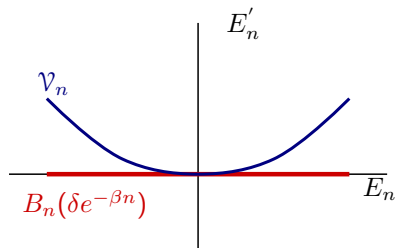
Regularidade das variedades



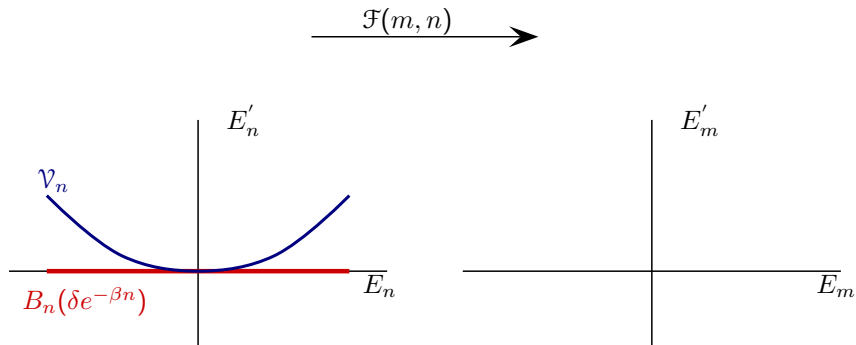
Regularidade das variedades



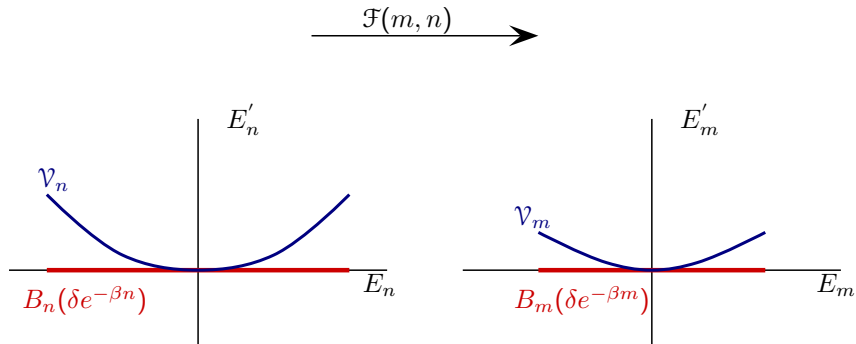
Regularidade das variedades



Regularidade das variedades

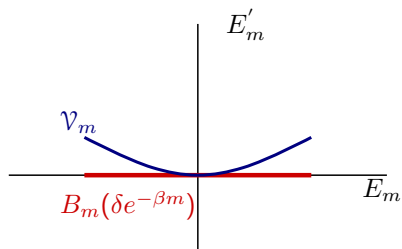
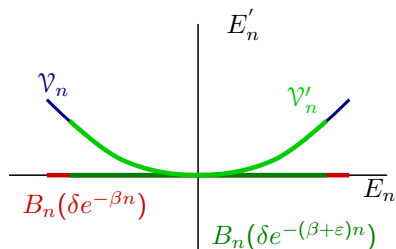


Regularidade das variedades

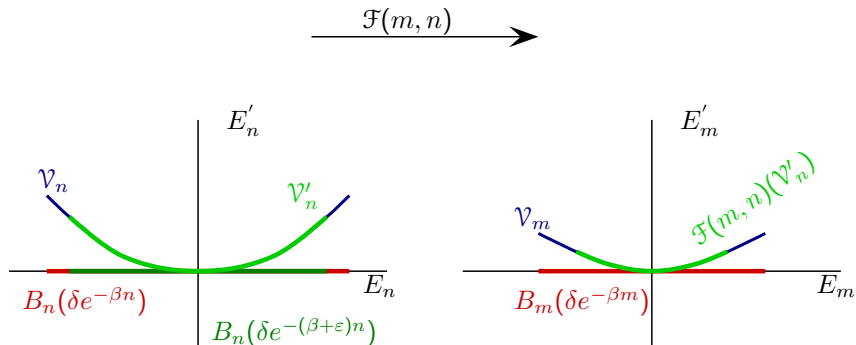


Regularidade das variedades

$$\xrightarrow{\mathcal{F}(m, n)}$$



Regularidade das variedades



Teorema 2 (L. Barreira, C. S. e C. Valls)

Se a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$ e temos $a + \beta < 0$ e $a + \varepsilon < b$, então existe $\delta > 0$ tal que:

Teorema 2 (L. Barreira, C. S. e C. Valls)

Se a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$ e temos $a + \beta < 0$ e $a + \varepsilon < b$, então existe $\delta > 0$ tal que:

- *para cada $n \in \mathbb{N}$ a variedade \mathcal{V}'_n é de classe C^r ;*

Teorema 2 (L. Barreira, C. S. e C. Valls)

Se a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$ e temos $a + \beta < 0$ e $a + \varepsilon < b$, então existe $\delta > 0$ tal que:

- 1 para cada $n \in \mathbb{N}$ a variedade \mathcal{V}'_n é de classe C^r ;
- 2 para cada $m \geq n$ e $\xi, \bar{\xi}, u, \bar{u} \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$ temos

$$\begin{aligned} \|d_{p_{n,\xi}} \mathcal{F}(m, n) z_{\xi, u} - d_{p_{n,\bar{\xi}}} \mathcal{F}(m, n) z_{\bar{\xi}, \bar{u}}\| \\ \leq 4De^{a(m-n)+\varepsilon n} (\|\xi - \bar{\xi}\| + \|u - \bar{u}\|), \end{aligned}$$

onde $p_{n,\xi} = (\xi, \varphi_n(\xi))$ e $z_{\xi, u} = (u, d_\xi \varphi_n u)$.

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

- O caso $r = 1$ segue do Teorema 1, obtido por L. Barreira e C. Valls.

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

- O caso $r = 1$ segue do Teorema 1, obtido por L. Barreira e C. Valls.

Passo de indução

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

- O caso $r = 1$ segue do Teorema 1, obtido por L. Barreira e C. Valls.

Passo de indução

- Supomos que a afirmação do Teorema 2 é satisfeita com $s < r$.

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

- O caso $r = 1$ segue do Teorema 1, obtido por L. Barreira e C. Valls.

Passo de indução

- Supomos que a afirmação do Teorema 2 é satisfeita com $s < r$.
- Estendemos linearmente a dinâmica, o que permite obter uma nova dinâmica de classe C^{r-1} .

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

- O caso $r = 1$ segue do Teorema 1, obtido por L. Barreira e C. Valls.

Passo de indução

- Supomos que a afirmação do Teorema 2 é satisfeita com $s < r$.
- Estendemos linearmente a dinâmica, o que permite obter uma nova dinâmica de classe C^{r-1} .

Consideramos a sucessão de transformações $G_n: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dada por

$$G_n(v, z) = (F_n(v), d_v F_n z) = (A_n v + f_n(v), A_n z + d_v f_n z)$$

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

- O caso $r = 1$ segue do Teorema 1, obtido por L. Barreira e C. Valls.

Passo de indução

- Supomos que a afirmação do Teorema 2 é satisfeita com $s < r$.
- Estendemos linearmente a dinâmica, o que permite obter uma nova dinâmica de classe C^{r-1} .

Consideramos a sucessão de transformações $G_n: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dada por

$$G_n(v, z) = (F_n(v), d_v F_n z) = (A_n v + f_n(v), A_n z + d_v f_n z)$$

e definimos

$$\mathcal{G}(m, n) = \begin{cases} G_{m-1} \cdots G_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ G_m^{-1} \cdots G_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}$$

Demonstração do Teorema 2

Hipótese de indução

- O caso $r = 1$ segue do Teorema 1, obtido por L. Barreira e C. Valls.

Passo de indução

- Supomos que a afirmação do Teorema 2 é satisfeita com $s < r$.
- Estendemos linearmente a dinâmica, o que permite obter uma nova dinâmica de classe C^{r-1} .

Consideramos a sucessão de transformações $G_n: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dada por

$$G_n(v, z) = (F_n(v), d_v F_n z) = (A_n v + f_n(v), A_n z + d_v f_n z)$$

e definimos

$$\mathcal{G}(m, n) = \begin{cases} G_{m-1} \cdots G_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \\ G_m^{-1} \cdots G_{n-1}^{-1}, & m < n \end{cases}$$

Temos

$$\mathcal{G}(m, n)(v, z) = (\mathcal{F}(m, n)(v), d_v \mathcal{F}(m, n)z)$$

Demonstração do Teorema 2

Consideramos a sucessão de transformações $g_n: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dada por

$$g_n(v, z) = (f_n(v), d_v f_n z)$$

Demonstração do Teorema 2

Consideramos a sucessão de transformações $g_n: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dada por

$$g_n(v, z) = (f_n(v), d_v f_n z)$$

Lemma 1

São válidas as seguintes propriedades:

- 1 g_n é de classe C^{r-1} e $g_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- 2 existe $C = C(q, r) > 0$ tal que para quaisquer $j = 0, \dots, r-2$, $n \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ temos

$$\|d_{p_1}^j g_n - d_{p_2}^j g_n\| \leq C \|p_1 - p_2\| (\|p_1\|^{q-j} + \|p_2\|^{q-j}). \quad (1)$$

Demonstração do Teorema 2

Definimos o espaço \mathcal{Y}_β das sucessões de funções

$$\Phi_n: B_n(\delta e^{-\beta n}) \times B_n(\delta e^{-\beta n}) \rightarrow E'_n$$

tais que para cada $n \in \mathbb{N}$:

- 1 a função $u \mapsto \Phi_n(\xi, u)$ é linear para cada $\xi \in B_n(\delta e^{-\beta n})$;
- 2 para cada $\xi, \bar{\xi}, u, \bar{u} \in B_n(\delta e^{-\beta n})$ temos

$$\|\Phi_n(\xi, u) - \Phi_n(\bar{\xi}, \bar{u})\| \leq \|\xi - \bar{\xi}\| + \|u - \bar{u}\|.$$

Em particular, para cada $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Y}_\beta$ temos

$$\Phi_n(\xi, 0) = 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \xi \in B_n(\delta e^{-\beta n}).$$

Demonstração do Teorema 2

- Como a dinâmica estendida está nas condições do Teorema 1, podemos obter variedades estáveis \mathcal{W}'_n para a dinâmica estendida, as quais, por hipótese de indução, são de classe C^s .

Demonstração do Teorema 2

- Como a dinâmica estendida está nas condições do Teorema 1, podemos obter variedades estáveis \mathcal{W}'_n para a dinâmica estendida, as quais, por hipótese de indução, são de classe C^s .

$$\mathcal{W}'_n = \{(\xi, \varphi_n(\xi), u, \Phi_n(\xi, u)) : \xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})\}.$$

- As primeiras componentes de \mathcal{W}'_n coincidem com as variedades estáveis \mathcal{V}'_n .

Demonstração do Teorema 2

- Como a dinâmica estendida está nas condições do Teorema 1, podemos obter variedades estáveis \mathcal{W}'_n para a dinâmica estendida, as quais, por hipótese de indução, são de classe C^s .

$$\mathcal{W}'_n = \{(\xi, \varphi_n(\xi), u, \Phi_n(\xi, u)) : \xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})\}.$$

- As primeiras componentes de \mathcal{W}'_n coincidem com as variedades estáveis \mathcal{V}'_n .
- As segundas componentes de \mathcal{W}'_n coincidem com os espaços tangentes às variedades \mathcal{V}'_n .

Demonstração do Teorema 2

- Como a dinâmica estendida está nas condições do Teorema 1, podemos obter variedades estáveis \mathcal{W}'_n para a dinâmica estendida, as quais, por hipótese de indução, são de classe C^s .

$$\mathcal{W}'_n = \{(\xi, \varphi_n(\xi), u, \Phi_n(\xi, u)) : \xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})\}.$$

- As primeiras componentes de \mathcal{W}'_n coincidem com as variedades estáveis \mathcal{V}'_n .
- As segundas componentes de \mathcal{W}'_n coincidem com os espaços tangentes às variedades \mathcal{V}'_n .

Para mostrar esta afirmação temos de recorrer a normas de Lyapunov.

Demonstração do Teorema 2

- Escolhemos $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a - \beta, b\}$

Demonstração do Teorema 2

- Escolhemos $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a - \beta, b\}$
- Definimos

$$\|u\|'_m = \sum_{k \geq m} \|\mathcal{A}(k, m)u\| e^{-(a+\varrho)(k-m)} \quad \text{para } u \in E_m,$$

$$\|v\|'_m = \sum_{k=0}^m \|\mathcal{A}(m, k)^{-1}v\| e^{(b-\varrho)(m-k)} \quad \text{para } v \in E'_m.$$

Demonstração do Teorema 2

- Escolhemos $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a - \beta, b\}$
- Definimos

$$\|u\|'_m = \sum_{k \geq m} \|\mathcal{A}(k, m)u\| e^{-(a+\varrho)(k-m)} \quad \text{para } u \in E_m,$$

$$\|v\|'_m = \sum_{k=0}^m \|\mathcal{A}(m, k)^{-1}v\| e^{(b-\varrho)(m-k)} \quad \text{para } v \in E'_m.$$

- Mostra-se facilmente que

$$\|u\| \leq \|u\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|u\|, \quad \|v\| \leq \|v\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|v\|,$$

onde $C = D/(1 - e^{-\varrho}) \geq 1$.

Demonstração do Teorema 2

- Escolhemos $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a - \beta, b\}$
- Definimos

$$\|u\|'_m = \sum_{k \geq m} \|\mathcal{A}(k, m)u\| e^{-(a+\varrho)(k-m)} \quad \text{para } u \in E_m,$$

$$\|v\|'_m = \sum_{k=0}^m \|\mathcal{A}(m, k)^{-1}v\| e^{(b-\varrho)(m-k)} \quad \text{para } v \in E'_m.$$

- Mostra-se facilmente que

$$\|u\| \leq \|u\|'_m \leq Ce^{\varepsilon m} \|u\|, \quad \|v\| \leq \|v\|'_m \leq Ce^{\varepsilon m} \|v\|,$$

onde $C = D/(1 - e^{-\varrho}) \geq 1$.

- Para $u \in E_m$ e $v \in E'_m$ temos

$$\|A_m u\|'_{m+1} \leq e^{a+\varrho} \|u\|'_m \quad \text{e} \quad \|A_m^{-1} v\|'_m \leq e^{-b+\varrho} \|v\|'_{m+1}.$$

Demonstração do Teorema 2

- Escolhemos $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a - \beta, b\}$
- Definimos

$$\|u\|'_m = \sum_{k \geq m} \|A(k, m)u\| e^{-(a+\varrho)(k-m)} \quad \text{para } u \in E_m,$$
$$\|v\|'_m = \sum_{k=0}^m \|A(m, k)^{-1}v\| e^{(b-\varrho)(m-k)} \quad \text{para } v \in E'_m.$$

- Mostra-se facilmente que

$$\|u\| \leq \|u\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|u\|, \quad \|v\| \leq \|v\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|v\|,$$

onde $C = D/(1 - e^{-\varrho}) \geq 1$.

- Para $u \in E_m$ e $v \in E'_m$ temos

$$\|A_m u\|'_{m+1} \leq e^{a+\varrho} \|u\|'_m \quad \text{e} \quad \|A_m^{-1} v\|'_m \leq e^{-b+\varrho} \|v\|'_{m+1}.$$

- Definimos $\|(u, v)\|'_m = \|u\|'_m + \|v\|'_m$ para $(u, v) \in E_m \times E'_m$.

Demonstração do Teorema 2

Para $\xi \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$ escrevemos $p_m = \mathcal{F}(m, n)(\xi, \varphi_n(\xi))$

Demonstração do Teorema 2

Para $\xi \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$ escrevemos $p_m = \mathcal{F}(m, n)(\xi, \varphi_n(\xi))$

Lema 1

Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$ e $(u, v) \in E_n \times E'_n$, se a sucessão

$$\mathbb{N} \ni j \mapsto \|(d_{p_n} \mathcal{F}(n+j, n))(u, v)\|'_{n+j} \text{ é limitada}$$

então $(u, v) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$.

- Como E'_n e $T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ geram \mathbb{R}^k , temos $(u, v) = (\bar{u}_n, \bar{v}_n) + (0, z_n)$, com $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ e $(0, z_n) \in E'_n$.
- Assim $(d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, v) = (\bar{u}_m, \bar{v}_m) + (d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(0, z_n)$
- Temos $\|(\bar{u}_m, \bar{v}_m)\|'_m \leq 4e^{(a+\varrho)(m-n)} \|(u, v)\|'_n$ e logo $m \mapsto \|(\bar{u}_m, \bar{v}_m)\|'_m$ é limitada
- Por hipótese $m \mapsto \|(d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, v)\|'_m$ é limitada
- Logo $m \mapsto \|(d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(0, z_n)\|'_m$ é limitada e assim $z_n = 0$

Demonstração do Teorema 2

Lema 2

$(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ para cada $n \geq 0$ e $\xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$.

- Escrevemos $(u_m, v_m) = (d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, \Phi_n(\xi, u))$

Demonstração do Teorema 2

Lema 2

$(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ para cada $n \geq 0$ e $\xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$.

- Escrevemos $(u_m, v_m) = (d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, \Phi_n(\xi, u))$
- Temos $\|v_m\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|u_m\|'_m \leq 2C e^{\varepsilon m} e^{(a+\varrho)(m-n)} \|u_n\|'_n$

Demonstração do Teorema 2

Lema 2

$(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ para cada $n \geq 0$ e $\xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$.

- Escrevemos $(u_m, v_m) = (d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, \Phi_n(\xi, u))$
- Temos $\|v_m\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|u_m\|'_m \leq 2C e^{\varepsilon m} e^{(a+\varrho)(m-n)} \|u_n\|'_n$
- Como $a + \varrho + \varepsilon < 0$, a sucessão $m \mapsto \|(u_m, v_m)\|'_m$ é limitada

Demonstração do Teorema 2

Lema 2

$(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ para cada $n \geq 0$ e $\xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$.

- Escrevemos $(u_m, v_m) = (d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, \Phi_n(\xi, u))$
- Temos $\|v_m\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|u_m\|'_m \leq 2C e^{\varepsilon m} e^{(a+\varrho)(m-n)} \|u_n\|'_n$
- Como $a + \varrho + \varepsilon < 0$, a sucessão $m \mapsto \|(u_m, v_m)\|'_m$ é limitada
- Assim $(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$.

Demonstração do Teorema 2

Lema 2

$(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ para cada $n \geq 0$ e $\xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$.

- Escrevemos $(u_m, v_m) = (d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, \Phi_n(\xi, u))$
 - Temos $\|v_m\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|u_m\|'_m \leq 2C e^{\varepsilon m} e^{(a+\varrho)(m-n)} \|u_n\|'_n$
 - Como $a + \varrho + \varepsilon < 0$, a sucessão $m \mapsto \|(u_m, v_m)\|'_m$ é limitada
 - Assim $(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$.
-
- Como \mathcal{W}'_n é de classe C^s , os espaços tangentes às variedades \mathcal{V}'_n são de classe C^s e portanto as variedades \mathcal{V}'_n são de classe C^{s+1} .

Demonstração do Teorema 2

Lema 2

$(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$ para cada $n \geq 0$ e $\xi, u \in B_n(\delta e^{-(\beta+\varepsilon)n})$.

- Escrevemos $(u_m, v_m) = (d_{p_n} \mathcal{F}(m, n))(u, \Phi_n(\xi, u))$
 - Temos $\|v_m\|'_m \leq C e^{\varepsilon m} \|u_m\|'_m \leq 2C e^{\varepsilon m} e^{(a+\varrho)(m-n)} \|u_n\|'_n$
 - Como $a + \varrho + \varepsilon < 0$, a sucessão $m \mapsto \|(u_m, v_m)\|'_m$ é limitada
 - Assim $(u, \Phi_n(\xi, u)) \in T_{p_n} \mathcal{V}'_n$.
-
- Como \mathcal{W}'_n é de classe C^s , os espaços tangentes às variedades \mathcal{V}'_n são de classe C^s e portanto as variedades \mathcal{V}'_n são de classe C^{s+1} .
 - Obtemos o decaimento exponencial das derivadas.

Variedades Estáveis em espaços de Banach

Objectivo: estabelecer a existência de variedades invariantes estáveis C^k em espaços de Banach para perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Variedades Estáveis em espaços de Banach

Objectivo: estabelecer a existência de variedades invariantes estáveis C^k em espaços de Banach para perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Consideramos a dinâmica

$$v_{n+1} = F_n(v_n) \quad \text{com} \quad F_n(v) = A_n v + f_n(v),$$

Variedades Estáveis em espaços de Banach

Objectivo: estabelecer a existência de variedades invariantes estáveis C^k em espaços de Banach para perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Consideramos a dinâmica

$$v_{n+1} = F_n(v_n) \quad \text{com} \quad F_n(v) = A_n v + f_n(v),$$

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(X)$ é uma sucessão de operadores lineares invertíveis num espaço de Banach X .

Variedades Estáveis em espaços de Banach

Objectivo: estabelecer a existência de variedades invariantes estáveis C^k em espaços de Banach para perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Consideramos a dinâmica

$$v_{n+1} = F_n(v_n) \quad \text{com} \quad F_n(v) = A_n v + f_n(v),$$

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(X)$ é uma sucessão de operadores lineares invertíveis num espaço de Banach X .
- $f_n: X \rightarrow X$ é sucessão de funções de classe C^k para a qual existe $\delta > 0$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$ e $u, v \in X$, temos, fazendo $\beta = \varepsilon(k+2)$,
 - $f_n(0) = 0$
 - $d_0 f_n = 0$,
 - $\|d_u^j f_n\| \leq \delta e^{-\beta n}$, $j = 1, \dots, k$
 - $\|d_u^k f_n - d_v^k f_n\| \leq \delta e^{-\beta n} \|u - v\|$

Variedades Estáveis em espaços de Banach

Objetivo: estabelecer a existência de variedades invariantes estáveis C^k em espaços de Banach para perturbações de dicotomias exponenciais não-uniformes.

Consideramos a dinâmica

$$v_{n+1} = F_n(v_n) \quad \text{com} \quad F_n(v) = A_n v + f_n(v),$$

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(X)$ é uma sucessão de operadores lineares invertíveis num espaço de Banach X .
- $f_n: X \rightarrow X$ é sucessão de funções de classe C^k para a qual existe $\delta > 0$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$ e $u, v \in X$, temos, fazendo $\beta = \varepsilon(k+2)$,
 - $f_n(0) = 0$
 - $d_0 f_n = 0$,
 - $\|d_u^j f_n\| \leq \delta e^{-\beta n}$, $j = 1, \dots, k$
 - $\|d_u^k f_n - d_v^k f_n\| \leq \delta e^{-\beta n} \|u - v\|$

Definimos

$$\mathcal{A}(m, n) = \begin{cases} A_{m-1} \cdots A_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \end{cases}, \quad \mathcal{F}(m, n) = \begin{cases} F_{m-1} \circ \cdots \circ F_n, & m > n \\ \text{Id}, & m = n \end{cases}.$$

Variedades Estáveis em espaços de Banach

- Supomos que a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme.

Variedades Estáveis em espaços de Banach

- Supomos que a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme.
- Definimos $E_n = P_n(X)$ e $E'_n = Q_n(X)$

Variedades Estáveis em espaços de Banach

- Supomos que a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme.
- Definimos $E_n = P_n(X)$ e $E'_n = Q_n(X)$
- Consideramos o espaço \mathcal{X} das sucessões de funções $\varphi_n: E_n \rightarrow E'_n$, $n \in \mathbb{N}$ de classe C^k tais que para $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in E_n$ temos:
 - $\varphi_n(0) = 0$
 - $d_0 \varphi_n = 0$
 - $\|d_x^j \varphi_n\| \leq 1$ para $j = 1, \dots, k$
 - $\|d_x^k \varphi_n - d_y^k \varphi_n\| \leq \|x - y\|$

Variedades Estáveis em espaços de Banach

- Supomos que a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme.
- Definimos $E_n = P_n(X)$ e $E'_n = Q_n(X)$
- Consideramos o espaço \mathcal{X} das sucessões de funções $\varphi_n: E_n \rightarrow E'_n$, $n \in \mathbb{N}$ de classe C^k tais que para $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in E_n$ temos:
 - $\varphi_n(0) = 0$
 - $d_0 \varphi_n = 0$
 - $\|d_x^j \varphi_n\| \leq 1$ para $j = 1, \dots, k$
 - $\|d_x^k \varphi_n - d_y^k \varphi_n\| \leq \|x - y\|$
- Consideramos os gráficos:

$$\mathcal{V}_n = \{(\xi, \varphi_n(\xi)) : \xi \in E_n\}$$

Teorema 3 (L. Barreira, C. S. e C. Valls)

Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme e

$$a + \varepsilon < b$$

então existe uma única sucessão de funções $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ tais que

$$\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}_n) \subset \mathcal{V}_m$$

para todo o $m \geq n$. Além disso:

- ❶ \mathcal{V}_n é uma variedade de classe C^k com $T_0 \mathcal{V}_n = E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- ❷ existe $K > 0$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, $\xi, \bar{\xi} \in E_n$ e $j = 0, \dots, k$,

$$\|d_y^j \mathcal{F}(m, n) - d_{\bar{y}}^j \mathcal{F}(m, n)\| \leq K e^{a(m-n) + \varepsilon(j+1)n} \|\xi - \bar{\xi}\|,$$

onde $y = (\xi, \varphi_n(\xi))$ e $\bar{y} = (\bar{\xi}, \varphi_n(\bar{\xi}))$.

Demonstração do Teorema 3

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo consideramos o espaço $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$ das sucessões de funções $x_m: E_n \rightarrow E_m$, $m \geq n$ de classe C^k tais que para alguma constante $C > D$:

Demonstração do Teorema 3

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo consideramos o espaço $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$ das sucessões de funções $x_m: E_n \rightarrow E_m$, $m \geq n$ de classe C^k tais que para alguma constante $C > D$:

- $x_n(\xi) = \xi$ para cada $\xi \in E_n$;

Demonstração do Teorema 3

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo consideramos o espaço $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$ das sucessões de funções $x_m: E_n \rightarrow E_m$, $m \geq n$ de classe C^k tais que para alguma constante $C > D$:

- $x_n(\xi) = \xi$ para cada $\xi \in E_n$;
- Para $j = 1, \dots, k$,

$$\|x\|' := \sup \left\{ \frac{\|x_m(\xi)\|}{\|\xi\|} e^{-a(m-n)-\varepsilon n} : m \geq n, \xi \in E_n \setminus \{0\} \right\} \leq C$$

e

$$\|x\|_j := \sup \{ \|d_\xi^j x_m\| e^{-a(m-n)-\varepsilon j n} : m \geq n, \xi \in E_n \} \leq C;$$

Demonstração do Teorema 3

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo consideramos o espaço $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$ das sucessões de funções $x_m: E_n \rightarrow E_m$, $m \geq n$ de classe C^k tais que para alguma constante $C > D$:

- $x_n(\xi) = \xi$ para cada $\xi \in E_n$;
- Para $j = 1, \dots, k$,

$$\|x\|' := \sup \left\{ \frac{\|x_m(\xi)\|}{\|\xi\|} e^{-a(m-n)-\varepsilon n} : m \geq n, \xi \in E_n \setminus \{0\} \right\} \leq C$$

e

$$\|x\|_j := \sup \{ \|d_\xi^j x_m\| e^{-a(m-n)-\varepsilon j n} : m \geq n, \xi \in E_n \} \leq C;$$

•

$$|x|'_k := \sup \left\{ \frac{\|d_\xi^k x_m - d_{\bar{\xi}}^k x_m\|}{\|\xi - \bar{\xi}\|} e^{-a(m-n)-\varepsilon(k+1)n} \right\} \leq C,$$

onde o supremo é obtido sobre $m \geq n$ e $\xi, \bar{\xi} \in E_n$ com $\xi \neq \bar{\xi}$.

Demonstração do Teorema 3

Consideramos espaços métricos completos adequados

Demonstração do Teorema 3

Consideramos espaços métricos completos adequados

- O espaço \mathcal{X} é um espaço métrico completo com a norma dada por

$$\|\varphi\| = \sup \left\{ \frac{\|\varphi_n(x)\|}{\|x\|} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in E_n \setminus \{0\} \right\}.$$

Demonstração do Teorema 3

Consideramos espaços métricos completos adequados

- O espaço \mathcal{X} é um espaço métrico completo com a norma dada por

$$\|\varphi\| = \sup \left\{ \frac{\|\varphi_n(x)\|}{\|x\|} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in E_n \setminus \{0\} \right\}.$$

- O espaço \mathcal{B} é um espaço métrico completo com a norma dada por

$$\|x\|' := \sup \left\{ \frac{\|x_m(\xi)\|}{\|\xi\|} e^{-a(m-n)-\varepsilon n} : m \geq n, \xi \in E_n \setminus \{0\} \right\}.$$

Demonstração do Teorema 3

Consideramos espaços métricos completos adequados

- O espaço \mathcal{X} é um espaço métrico completo com a norma dada por

$$\|\varphi\| = \sup \left\{ \frac{\|\varphi_n(x)\|}{\|x\|} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in E_n \setminus \{0\} \right\}.$$

- O espaço \mathcal{B} é um espaço métrico completo com a norma dada por

$$\|x\|' := \sup \left\{ \frac{\|x_m(\xi)\|}{\|\xi\|} e^{-a(m-n)-\varepsilon n} : m \geq n, \xi \in E_n \setminus \{0\} \right\}.$$

Estes resultados usam de forma decisiva um Lema devido a Henry que afirma que a bola unitária no espaço das funções de classe C^k com k -ésima derivada Lipschitz é fechada na topologia C^0 .

Demonstração do Teorema 3

Obtemos estimativas para as derivadas

Demonstração do Teorema 3

Obtemos estimativas para as derivadas

Fórmula de Faà di Bruno para a n -ésima derivada de uma composição:

$$d_x^n(f \circ g) = \sum_{k=1}^n d_y^k f \sum_{\substack{0 \leq r_1, \dots, r_k \leq n \\ r_1 + \dots + r_k = n}} c_{r_1 \dots r_k} d_x^{r_1} g \cdots d_x^{r_k} g,$$

para alguns $c_{r_1 \dots r_k} \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração do Teorema 3

Extensão a várias variáveis da fórmula de Faà di Bruno para transformações em espaços de Banach permite obter:

$$\|d_x^n(f \circ (g_1, g_2))\| \leq c \sum_{q(n)} \|\partial_{y_1, y_2}^{\lambda_1, \lambda_2} f\| \sum_{s=1}^n \sum_{p_s(n, \lambda)} \prod_{j=1}^s \|d_x^{l_j} g_1\|^{k_{j1}} \|d_x^{l_j} g_2\|^{k_{j2}},$$

com as notações

$$\partial_{y_1, y_2}^{\lambda_1, \lambda_2} f = \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial^{\lambda_1} y_1 \partial^{\lambda_2} y_2}(y_1, y_2),$$

$$q(n) = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1 + \lambda_2 \in \{1, \dots, n\}\}$$

e, fazendo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$,

$$p_s(n, \lambda) = \left\{ (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{s1}, k_{s2}; l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}_0^{2s} \times \mathbb{N}^s : \right. \\ (k_{j1}, k_{j2}) \neq (0, 0) \text{ para } 1 < j < s, l_1 < \dots < l_s, \\ \left. \sum_{j=1}^s k_{jl} = \lambda_l \text{ para } l = 1, 2 \text{ e } \sum_{j=1}^s l_j (k_{j1} + k_{j2}) = n \right\}.$$

Demonstração do Teorema 3

Dados $\varphi = (\varphi_m)_m \in \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{B}$ e $m \in \mathbb{N}$ escrevemos

$$\varphi_m^* = \varphi_m \circ x_m. \quad \text{e} \quad f_m^*(\xi) = f_m(x_m(\xi), \varphi_m(x_m(\xi)))$$

- Existem $A, B > 0$ tais que para $\varphi \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\xi \in E_n$ temos para $m \geq n$ e $j = 1, \dots, k$

$$\|d_\xi^j \varphi_m^*\| \leq A e^{a(m-n)+\varepsilon j n} \quad \text{e} \quad \|d_\xi^j f_m^*\| \leq \delta e^{-\beta m} B e^{a(m-n)+\varepsilon j n}.$$

- Existem $L, E > 0$ tais que para $x \in \mathcal{B}$, $\varphi \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\xi, \bar{\xi} \in E_n$ temos para $m \geq n$ e $j = 0, \dots, k$

$$\|d_\xi^j x_m - d_{\bar{\xi}}^j x_m\| \leq C e^{a(m-n)+\varepsilon(j+1)n} \|\xi - \bar{\xi}\|,$$

$$\|d_\xi^j \varphi_m^* - d_{\bar{\xi}}^j \varphi_m^*\| \leq L e^{a(m-n)+\varepsilon(j+1)n} \|\xi - \bar{\xi}\|$$

e

$$\|d_\xi^k f_m^* - d_{\bar{\xi}}^k f_m^*\| \leq \delta E e^{-\beta m} e^{a(m-n)+\varepsilon(k+1)n} \|\xi - \bar{\xi}\|.$$

Demonstração do Teorema 3

- Escrevemos $f_m = (g_m, h_m)$, com valores em $E_m \oplus E'_m$.

Demonstração do Teorema 3

- Escrevemos $f_m = (g_m, h_m)$, com valores em $E_m \oplus E'_m$.
- Escrevemos $v_m = (x_m, y_m) \in E_m \oplus E'_m$.

Demonstração do Teorema 3

- Escrevemos $f_m = (g_m, h_m)$, com valores em $E_m \oplus E'_m$.
- Escrevemos $v_m = (x_m, y_m) \in E_m \oplus E'_m$.
- Dado $v_n = (\xi, \eta) \in E_n \oplus E'_n$ temos para cada $m > n$,

$$x_m = \mathcal{A}(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)g_l(x_l, y_l),$$
$$y_m = \mathcal{A}(m, n)\eta + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)h_l(x_l, y_l).$$

Demonstração do Teorema 3

- Escrevemos $f_m = (g_m, h_m)$, com valores em $E_m \oplus E'_m$.
- Escrevemos $v_m = (x_m, y_m) \in E_m \oplus E'_m$.
- Dado $v_n = (\xi, \eta) \in E_n \oplus E'_n$ temos para cada $m > n$,

$$x_m = A(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} A(m, l+1)g_l(x_l, y_l),$$
$$y_m = A(m, n)\eta + \sum_{l=n}^{m-1} A(m, l+1)h_l(x_l, y_l).$$

- Procuramos uma sucessão $\varphi \in \mathcal{X}$ tal que

$$x_m = A(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} A(m, l+1)g_l(x_l, \varphi_l(x_l)),$$
$$\varphi_m(x_m) = A(m, n)\varphi_n(\xi) + \sum_{l=n}^{m-1} A(m, l+1)h_l(x_l, \varphi_l(x_l)).$$

Demonstração do Teorema 3

Solução na direcção estável

Lema 3

Para cada $\varphi \in \mathcal{X}$, dado $n \in \mathbb{N}$ existe uma e uma só sucessão $x^\varphi = (x_m^\varphi)_{m \geq n} \in \mathcal{B}$ tal que

$$x_m^\varphi(\xi) = \mathcal{A}(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)g_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi)))$$

para quaisquer $m > n$ e $\xi \in E_n$. Para esta sucessão temos

$$\|x_m^\varphi(\xi)\| \leq Ce^{a(m-n)+\varepsilon n}\|\xi\|, \quad m \geq n, \quad \xi \in E_n.$$

Demonstração do Teorema 3

- Definimos um operador J em \mathcal{B} por $(Jx)_n(\xi) = \xi$ e para cada $m > n$,

$$(Jx)_m(\xi) = \mathcal{A}(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)g_l(x_l(\xi), \varphi_l(x_l(\xi)))$$

Demonstração do Teorema 3

- Definimos um operador J em \mathcal{B} por $(Jx)_n(\xi) = \xi$ e para cada $m > n$,

$$(Jx)_m(\xi) = \mathcal{A}(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)g_l(x_l(\xi), \varphi_l(x_l(\xi)))$$

- Temos que $J(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e portanto $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ fica bem definido.

Demonstração do Teorema 3

- Definimos um operador J em \mathcal{B} por $(Jx)_n(\xi) = \xi$ e para cada $m > n$,

$$(Jx)_m(\xi) = \mathcal{A}(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)g_l(x_l(\xi), \varphi_l(x_l(\xi)))$$

- Temos que $J(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e portanto $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ fica bem definido.
- Temos $\|Jx - Jy\|' \leq \theta\|x - y\|'$ onde $\theta < 1$, desde que δ seja suficientemente pequeno. Assim, J é uma contracção em \mathcal{B} .

Demonstração do Teorema 3

- Definimos um operador J em \mathcal{B} por $(Jx)_n(\xi) = \xi$ e para cada $m > n$,

$$(Jx)_m(\xi) = \mathcal{A}(m, n)\xi + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)g_l(x_l(\xi), \varphi_l(x_l(\xi)))$$

- Temos que $J(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e portanto $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ fica bem definido.
- Temos $\|Jx - Jy\|' \leq \theta\|x - y\|'$ onde $\theta < 1$, desde que δ seja suficientemente pequeno. Assim, J é uma contracção em \mathcal{B} .
- Como \mathcal{B} é um espaço métrico completo existe um e um só $x^\varphi \in \mathcal{B}$ tal que $Jx^\varphi = x^\varphi$.

Demonstração do Teorema 3

Solução na direcção instável

Lemma 2

Dado δ suficientemente pequeno, para cada $\varphi \in \mathcal{X}$ as seguintes propriedades são equivalentes:

❶ *para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $m > n$ e $\xi \in E_n$,*

$$\varphi_m(x_m^\varphi(\xi)) = \mathcal{A}(m, n)\varphi_n(\xi) + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)h_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi)));$$

❷ *para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\xi \in E_n$,*

$$\varphi_n(\xi) = - \sum_{l=n}^{\infty} \mathcal{A}(l+1, n)^{-1} h_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi))).$$

Demonstração do Teorema 3

Lema 4

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe uma e uma só função $\varphi \in \mathcal{X}$ tal que

$$\varphi_m(x_m^\varphi(\xi)) = \mathcal{A}(m, n)\varphi_n(\xi) + \sum_{l=n}^{m-1} \mathcal{A}(m, l+1)h_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi)))$$

é satisfeita para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $m > n$ e $\xi \in E_n$.

Demonstração do Teorema 3

- Consideramos o operador Φ definido em \mathcal{X} por

$$(\Phi\varphi)_n(\xi) = - \sum_{l=n}^{\infty} \mathcal{A}(l+1, n)^{-1} h_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi))),$$

onde, para cada l , $x^\varphi = (x_l^\varphi)_{l \geq n}$ é a única sucessão dada pelo Lema anterior.

Demonstração do Teorema 3

- Consideramos o operador Φ definido em \mathcal{X} por

$$(\Phi\varphi)_n(\xi) = - \sum_{l=n}^{\infty} \mathcal{A}(l+1, n)^{-1} h_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi))),$$

onde, para cada l , $x^\varphi = (x_l^\varphi)_{l \geq n}$ é a única sucessão dada pelo Lema anterior.

- Verifica-se que $\Phi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ e consequentemente $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ está bem definido.

Demonstração do Teorema 3

- Consideramos o operador Φ definido em \mathcal{X} por

$$(\Phi\varphi)_n(\xi) = - \sum_{l=n}^{\infty} \mathcal{A}(l+1, n)^{-1} h_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi))),$$

onde, para cada l , $x^\varphi = (x_l^\varphi)_{l \geq n}$ é a única sucessão dada pelo Lema anterior.

- Verifica-se que $\Phi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ e consequentemente $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ está bem definido.
- Temos que $\|\Phi\varphi - \Phi\psi\| \leq \theta' \|\varphi - \psi\|$ com $\theta' < 1$, desde que δ seja suficientemente pequeno. Assim Φ é uma contracção em \mathcal{X} .

Demonstração do Teorema 3

- Consideramos o operador Φ definido em \mathcal{X} por

$$(\Phi\varphi)_n(\xi) = - \sum_{l=n}^{\infty} \mathcal{A}(l+1, n)^{-1} h_l(x_l^\varphi(\xi), \varphi_l(x_l^\varphi(\xi))),$$

onde, para cada l , $x^\varphi = (x_l^\varphi)_{l \geq n}$ é a única sucessão dada pelo Lema anterior.

- Verifica-se que $\Phi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ e consequentemente $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ está bem definido.
- Temos que $\|\Phi\varphi - \Phi\psi\| \leq \theta' \|\varphi - \psi\|$ com $\theta' < 1$, desde que δ seja suficientemente pequeno. Assim Φ é uma contracção em \mathcal{X} .
- Como \mathcal{X} é um espaço métrico completo existe uma e uma só sucessão de funções $\varphi \in \mathcal{X}$ tal que $\Phi(\varphi) = \varphi$.

Demonstração do Teorema 3

- Obtemos assim uma sucessão de funções φ tal que $\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}_n) \subset \mathcal{V}_m$.

Demonstração do Teorema 3

- Obtemos assim uma sucessão de funções φ tal que $\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}_n) \subset \mathcal{V}_m$.
- Como cada φ_n é uma função C^k , concluímos que cada \mathcal{V}_n é uma variedade de classe C^k .

Demonstração do Teorema 3

- Obtemos assim uma sucessão de funções φ tal que $\mathcal{F}(m, n)(\mathcal{V}_n) \subset \mathcal{V}_m$.
- Como cada φ_n é uma função C^k , concluímos que cada \mathcal{V}_n é uma variedade de classe C^k .
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi, \bar{\xi} \in E_n$ e $j = 0, \dots, k$ obtemos

$$\|d_y^j \mathcal{F}(m, n) - d_{\bar{y}}^j \mathcal{F}(m, n)\| \leq K e^{a(m-n) + \varepsilon(j+1)n} \|\xi - \bar{\xi}\|.$$

Comportamento sob perturbações

Objectivo: ver como as variedades \mathcal{V}_n variam com as transformações f_n .

Comportamento sob perturbações

Objectivo: ver como as variedades \mathcal{V}_n variam com as transformações f_n .

- Consideramos transformações de classe C^k , $f_n: X \rightarrow X$ e $\bar{f}_n: X \rightarrow X$, satisfazendo as condições do Teorema.

Objectivo: ver como as variedades \mathcal{V}_n variam com as transformações f_n .

- Consideramos transformações de classe C^k , $f_n: X \rightarrow X$ e $\bar{f}_n: X \rightarrow X$, satisfazendo as condições do Teorema.
- $\|f - \bar{f}\| = \sup \left\{ \frac{\|f_n(x) - \bar{f}_n(x)\|}{\|x\|} e^{2\varepsilon n} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in X \setminus \{0\} \right\}$

Comportamento sob perturbações

Objectivo: ver como as variedades \mathcal{V}_n variam com as transformações f_n .

- Consideramos transformações de classe C^k , $f_n: X \rightarrow X$ e $\bar{f}_n: X \rightarrow X$, satisfazendo as condições do Teorema.
- $\|f - \bar{f}\| = \sup \left\{ \frac{\|f_n(x) - \bar{f}_n(x)\|}{\|x\|} e^{2\varepsilon n} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in X \setminus \{0\} \right\}$
- $\|\varphi - \bar{\varphi}\| = \sup \left\{ \frac{\|\varphi_n(x) - \bar{\varphi}_n(x)\|}{\|x\|} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in E_n \setminus \{0\} \right\}.$

Objectivo: ver como as variedades \mathcal{V}_n variam com as transformações f_n .

- Consideramos transformações de classe C^k , $f_n: X \rightarrow X$ e $\bar{f}_n: X \rightarrow X$, satisfazendo as condições do Teorema.
- $\|f - \bar{f}\| = \sup \left\{ \frac{\|f_n(x) - \bar{f}_n(x)\|}{\|x\|} e^{2\varepsilon n} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in X \setminus \{0\} \right\}$
- $\|\varphi - \bar{\varphi}\| = \sup \left\{ \frac{\|\varphi_n(x) - \bar{\varphi}_n(x)\|}{\|x\|} : n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in E_n \setminus \{0\} \right\}.$

Teorema 4

Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme e $a + \varepsilon < b$ então para $\delta > 0$ suficientemente pequeno existe $M > 0$ tal que

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leq M \|f - \bar{f}\|.$$

Objectivo: obter uma caracterização das variedades estáveis \mathcal{V}_n .

Objectivo: obter uma caracterização das variedades estáveis \mathcal{V}_n .

Teorema 5

Suponhamos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $b > 0$ e que $a + \varepsilon < b$. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $v \in X$, se

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| < b - 2\varepsilon$$

então $v \in \mathcal{V}_n$.

- Seja $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a, b\}$.

Caracterização

- Seja $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a, b\}$.
- Definimos

$$\|u\|'_m = \sum_{k \geq m} \|\mathcal{A}(k, m)u\| e^{-(a+\varrho)(k-m)} \quad \text{para } u \in E_m,$$

$$\|v\|'_m = \sum_{k=0}^m \|\mathcal{A}(m, k)^{-1}v\| e^{(b-\varrho)(m-k)} \quad \text{para } v \in E'_m.$$

- Seja $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a, b\}$.
- Definimos

$$\|u\|'_m = \sum_{k \geq m} \|\mathcal{A}(k, m)u\| e^{-(a+\varrho)(k-m)} \quad \text{para } u \in E_m,$$

$$\|v\|'_m = \sum_{k=0}^m \|\mathcal{A}(m, k)^{-1}v\| e^{(b-\varrho)(m-k)} \quad \text{para } v \in E'_m.$$

- Para $(u, v) \in E_m \times E'_m$ definimos também $\|(u, v)\|'_m = \|u\|'_m + \|v\|'_m$.

- Seja $\varrho > 0$ tal que $\varrho < \min\{-a, b\}$.
- Definimos

$$\|u\|'_m = \sum_{k \geq m} \|\mathcal{A}(k, m)u\| e^{-(a+\varrho)(k-m)} \quad \text{para } u \in E_m,$$

$$\|v\|'_m = \sum_{k=0}^m \|\mathcal{A}(m, k)^{-1}v\| e^{(b-\varrho)(m-k)} \quad \text{para } v \in E'_m.$$

- Para $(u, v) \in E_m \times E'_m$ definimos também $\|(u, v)\|'_m = \|u\|'_m + \|v\|'_m$.

Lemma 3

Dados $m \in \mathbb{N}$ e $(u, v) \in E_m \times E'_m$ temos

$$\|(u, v)\| \leq \|(u, v)\|'_m \leq \frac{D^2 e^{2\varrho m}}{1 - e^{-\varrho}} \|(u, v)\|.$$

Caracterização

Para $n \in \mathbb{N}$, dada $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ definimos $R_n: E_n \rightarrow E_{n+1}$ e $S_n: E'_n \rightarrow E'_{n+1}$ por

$$(A_n + f_n)(\psi_n(y), y) = (R_n(y), S_n(y)) \in E_{n+1} \times E'_{n+1}, \quad y \in E'_n.$$

Caracterização

Para $n \in \mathbb{N}$, dada $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ definimos $R_n: E_n \rightarrow E_{n+1}$ e $S_n: E'_n \rightarrow E'_{n+1}$ por

$$(A_n + f_n)(\psi_n(y), y) = (R_n(y), S_n(y)) \in E_{n+1} \times E'_{n+1}, \quad y \in E'_n.$$

Lemma 4

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ uma função tal que

$$\|\psi_n(y) - \psi_n(z)\|'_n \leq \|y - z\|'_n$$

para quaisquer $y, z \in E'_n$. Então para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeno (independente de n) existe uma função $\psi_{n+1}: E'_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$ tal que $R_n = \psi_{n+1} \circ S_n$ e

$$\|\psi_{n+1}(y) - \psi_{n+1}(z)\|'_{n+1} \leq \|y - z\|'_{n+1}$$

para quaisquer $y, z \in E'_{n+1}$.

- Seja $v = (x, y) \in E_n \times E'_n$ tal que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| < b - 2\varepsilon$$

mas $v \notin \mathcal{V}_n$.

- Seja $v = (x, y) \in E_n \times E'_n$ tal que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| < b - 2\varepsilon$$

mas $v \notin \mathcal{V}_n$.

- Seja $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ a função constante dada por $\psi_n(y) = x$.

- Seja $v = (x, y) \in E_n \times E'_n$ tal que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| < b - 2\varepsilon$$

mas $v \notin \mathcal{V}_n$.

- Seja $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ a função constante dada por $\psi_n(y) = x$.
- O gráfico de ψ_n intersecta \mathcal{V}_n num único ponto $w = (x, z)$.

- Seja $v = (x, y) \in E_n \times E'_n$ tal que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| < b - 2\varepsilon$$

mas $v \notin \mathcal{V}_n$.

- Seja $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ a função constante dada por $\psi_n(y) = x$.
- O gráfico de ψ_n intersecta \mathcal{V}_n num único ponto $w = (x, z)$.
- Escrevemos $\mathcal{S}(m, n) = S_{m-1} \circ \cdots \circ S_n$,

- Seja $v = (x, y) \in E_n \times E'_n$ tal que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| < b - 2\varepsilon$$

mas $v \notin \mathcal{V}_n$.

- Seja $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ a função constante dada por $\psi_n(y) = x$.
- O gráfico de ψ_n intersecta \mathcal{V}_n num único ponto $w = (x, z)$.
- Escrevemos $\mathcal{S}(m, n) = S_{m-1} \circ \cdots \circ S_n$,
- Para $\gamma = y, z$,

$$\mathcal{F}(m, n)(\psi_n(\gamma), \gamma) = (\psi_m(\mathcal{S}(m, n)(\gamma)), \mathcal{S}(m, n)(\gamma)).$$

- Seja $v = (x, y) \in E_n \times E'_n$ tal que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| < b - 2\varepsilon$$

mas $v \notin \mathcal{V}_n$.

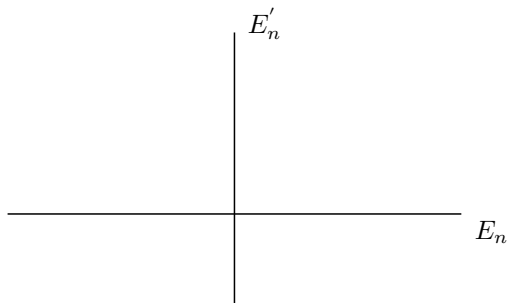
- Seja $\psi_n: E'_n \rightarrow E_n$ a função constante dada por $\psi_n(y) = x$.
- O gráfico de ψ_n intersecta \mathcal{V}_n num único ponto $w = (x, z)$.
- Escrevemos $\mathcal{S}(m, n) = S_{m-1} \circ \cdots \circ S_n$,
- Para $\gamma = y, z$,

$$\mathcal{F}(m, n)(\psi_n(\gamma), \gamma) = (\psi_m(\mathcal{S}(m, n)(\gamma)), \mathcal{S}(m, n)(\gamma)).$$

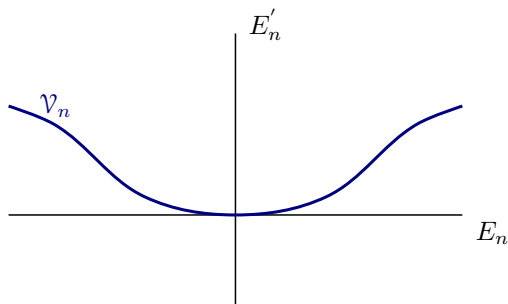
- Para quaisquer $m \geq n$ e $y, z \in E'_n$ temos

$$\|\mathcal{S}(m, n)(y) - \mathcal{S}(m, n)(z)\|'_m \geq (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\|'_n.$$

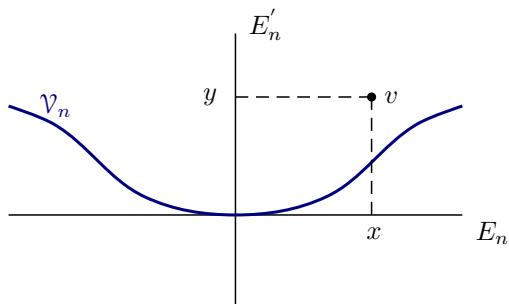
Caracterização



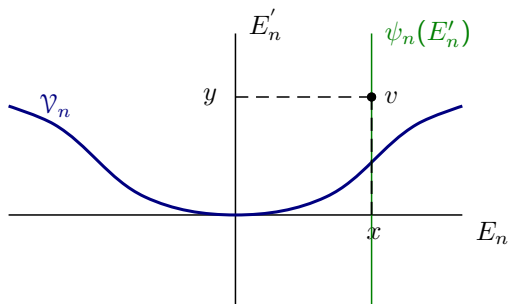
Caracterização



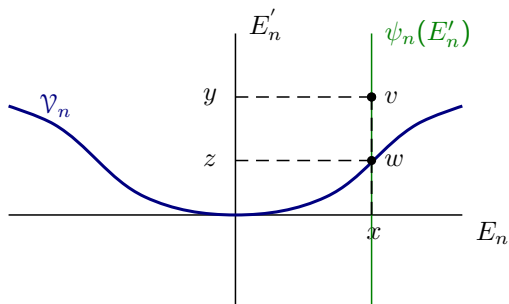
Caracterização



Caracterização



Caracterização



- Assim, para cada $m \geq n$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(m, n)(v) - \mathcal{F}(m, n)(w)\| &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} \|\mathcal{S}(m, n)(y) - \mathcal{S}(m, n)(z)\|'_m \\ &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\|'_n.\end{aligned}$$

- Assim, para cada $m \geq n$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(m, n)(v) - \mathcal{F}(m, n)(w)\| &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} \|\mathcal{S}(m, n)(y) - \mathcal{S}(m, n)(z)\|'_m \\ &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\|'_n.\end{aligned}$$

- Obtemos então

$$\|\mathcal{F}(m, n)(v)\| \geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\| - K e^{a(m-n) + \varepsilon n} \|w\|.$$

- Assim, para cada $m \geq n$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(m, n)(v) - \mathcal{F}(m, n)(w)\| &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} \|\mathcal{S}(m, n)(y) - \mathcal{S}(m, n)(z)\|'_m \\ &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\|'_n.\end{aligned}$$

- Obtemos então

$$\|\mathcal{F}(m, n)(v)\| \geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\| - K e^{a(m-n) + \varepsilon n} \|w\|.$$

- Como $a < 0$, concluímos que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| \geq b - \varrho - 2\varepsilon.$$

- Assim, para cada $m \geq n$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(m, n)(v) - \mathcal{F}(m, n)(w)\| &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} \|\mathcal{S}(m, n)(y) - \mathcal{S}(m, n)(z)\|'_m \\ &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\|'_n.\end{aligned}$$

- Obtemos então

$$\|\mathcal{F}(m, n)(v)\| \geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\| - K e^{a(m-n) + \varepsilon n} \|w\|.$$

- Como $a < 0$, concluímos que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| \geq b - \varrho - 2\varepsilon.$$

- Contradição desde que ϱ seja escolhido suficientemente pequeno.

- Assim, para cada $m \geq n$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(m, n)(v) - \mathcal{F}(m, n)(w)\| &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} \|\mathcal{S}(m, n)(y) - \mathcal{S}(m, n)(z)\|'_m \\ &\geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\|'_n.\end{aligned}$$

- Obtemos então

$$\|\mathcal{F}(m, n)(v)\| \geq \frac{1 - e^{-\varrho}}{D^2} e^{-2\varepsilon m} (e^{b-\varrho} - K\delta)^{m-n} \|y - z\| - K e^{a(m-n) + \varepsilon n} \|w\|.$$

- Como $a < 0$, concluímos que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{F}(m, n)(v)\| \geq b - \varrho - 2\varepsilon.$$

- Contradição desde que ϱ seja escolhido suficientemente pequeno.
- Portanto $v \in \mathcal{V}_n$.

Objectivo: mostrar que a equivariância da sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em relação a uma sucessão de operadores lineares garante a equivariância das variedades estáveis \mathcal{V}_n obtidas.

Equivariância

Objectivo: mostrar que a equivariância da sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em relação a uma sucessão de operadores lineares garante a equivariância das variedades estáveis \mathcal{V}_n obtidas.

Uma sucessão de transformações $G_n: X \rightarrow X$ é *equivariante* em relação a uma sucessão de operadores lineares invertíveis $S_n: X \rightarrow X$ se, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} \circ G_n = G_{n+1} \circ S_n.$$

Teorema 6

Nas condições do Teorema 3, se $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equivariante em relação à sucessão de operadores lineares $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|S_n\| < b - a - \varepsilon$$

então $S_n(\mathcal{V}_n) = \mathcal{V}_{n+1}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Equivariância – exemplo

- Consideremos constantes $\omega > 3\varepsilon \geq 0$ e transformações lineares dadas para cada $m \in \mathbb{N}$ por

$$A_m = \begin{pmatrix} e^{\omega + \varepsilon[(-1)^m m - \frac{1}{2}]} & 0 \\ 0 & e^{-\omega + \varepsilon[(-1)^{m+1} m - \frac{1}{2}]} \end{pmatrix}$$

e

$$S_m = \begin{pmatrix} e^{(-1)^m \varepsilon m + 8\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{(-1)^{m+1} \varepsilon m + 4\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

- Consideremos as projecções $P_n(x, y) = (0, y)$ e $Q_n(x, y) = (x, 0)$.

Equivariância – exemplo

- Consideremos constantes $\omega > 3\varepsilon \geq 0$ e transformações lineares dadas para cada $m \in \mathbb{N}$ por

$$A_m = \begin{pmatrix} e^{\omega + \varepsilon[(-1)^m m - \frac{1}{2}]} & 0 \\ 0 & e^{-\omega + \varepsilon[(-1)^{m+1} m - \frac{1}{2}]} \end{pmatrix}$$

e

$$S_m = \begin{pmatrix} e^{(-1)^m \varepsilon m + 8\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{(-1)^{m+1} \varepsilon m + 4\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

- Consideremos as projecções $P_n(x, y) = (0, y)$ e $Q_n(x, y) = (x, 0)$.
- Assim, a sucessão $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $D = 1$, $a = -\omega$ e $b = \omega$:

$$\|\mathcal{A}(m, n)P_n\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon n} \quad \text{e} \quad \|\mathcal{A}(m, n)^{-1}Q_m\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon m}.$$

Equivariância – exemplo

- Consideremos constantes $\omega > 3\varepsilon \geq 0$ e transformações lineares dadas para cada $m \in \mathbb{N}$ por

$$A_m = \begin{pmatrix} e^{\omega + \varepsilon[(-1)^m m - \frac{1}{2}]} & 0 \\ 0 & e^{-\omega + \varepsilon[(-1)^{m+1} m - \frac{1}{2}]} \end{pmatrix}$$

e

$$S_m = \begin{pmatrix} e^{(-1)^m \varepsilon m + 8\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{(-1)^{m+1} \varepsilon m + 4\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

- Consideremos as projecções $P_n(x, y) = (0, y)$ e $Q_n(x, y) = (x, 0)$.
- Assim, a sucessão $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $D = 1$, $a = -\omega$ e $b = \omega$:

$$\|\mathcal{A}(m, n)P_n\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon n} \quad \text{e} \quad \|\mathcal{A}(m, n)^{-1}Q_m\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon m}.$$

- Se n é par e $m > n$ é ímpar, $\mathcal{A}(m, n)P_n = e^{-\varepsilon/2} e^{-\omega(m-n) + \varepsilon n}$,

Equivariância – exemplo

- Consideremos constantes $\omega > 3\varepsilon \geq 0$ e transformações lineares dadas para cada $m \in \mathbb{N}$ por

$$A_m = \begin{pmatrix} e^{\omega + \varepsilon[(-1)^m m - \frac{1}{2}]} & 0 \\ 0 & e^{-\omega + \varepsilon[(-1)^{m+1} m - \frac{1}{2}]} \end{pmatrix}$$

e

$$S_m = \begin{pmatrix} e^{(-1)^m \varepsilon m + 8\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{(-1)^{m+1} \varepsilon m + 4\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

- Consideremos as projecções $P_n(x, y) = (0, y)$ e $Q_n(x, y) = (x, 0)$.
- Assim, a sucessão $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $D = 1$, $a = -\omega$ e $b = \omega$:

$$\|A(m, n)P_n\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon n} \quad \text{e} \quad \|A(m, n)^{-1}Q_m\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon m}.$$

- Se n é par e $m > n$ é ímpar, $A(m, n)P_n = e^{-\varepsilon/2} e^{-\omega(m-n) + \varepsilon n}$,
Se n é ímpar e $m > n$ é par, $A(m, n)^{-1}Q_m = e^{-\varepsilon/2} e^{-\omega(m-n) + \varepsilon m}$.

Equivariância – exemplo

- Consideremos constantes $\omega > 3\varepsilon \geq 0$ e transformações lineares dadas para cada $m \in \mathbb{N}$ por

$$A_m = \begin{pmatrix} e^{\omega + \varepsilon[(-1)^m m - \frac{1}{2}]} & 0 \\ 0 & e^{-\omega + \varepsilon[(-1)^{m+1} m - \frac{1}{2}]} \end{pmatrix}$$

e

$$S_m = \begin{pmatrix} e^{(-1)^m \varepsilon m + 8\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{(-1)^{m+1} \varepsilon m + 4\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

- Consideremos as projecções $P_n(x, y) = (0, y)$ e $Q_n(x, y) = (x, 0)$.
- Assim, a sucessão $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ admite uma dicotomia exponencial não-uniforme com $D = 1$, $a = -\omega$ e $b = \omega$:

$$\|A(m, n)P_n\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon n} \quad \text{e} \quad \|A(m, n)^{-1}Q_m\| \leq e^{-\omega(m-n) + \varepsilon m}.$$

- Se n é par e $m > n$ é ímpar, $A(m, n)P_n = e^{-\varepsilon/2} e^{-\omega(m-n) + \varepsilon n}$,
Se n é ímpar e $m > n$ é par, $A(m, n)^{-1}Q_m = e^{-\varepsilon/2} e^{-\omega(m-n) + \varepsilon m}$.
Concluimos que a dicotomia exponencial não é uniforme.

Equivariância – exemplo

- Consideramos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\alpha = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tal que
 - $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = 0$
 - $|\alpha^{(j-1)}| \leq j$ para $j = 1, 2, 3$

Equivariância – exemplo

- Consideramos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\alpha = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tal que
 - $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = 0$
 - $|\alpha^{(j-1)}| \leq j$ para $j = 1, 2, 3$
- Definimos $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f_0(x, y) = \alpha(x)(0, x^2)$.

Equivariância – exemplo

- Consideramos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\alpha = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tal que
 - $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = 0$
 - $|\alpha^{(j-1)}| \leq j$ para $j = 1, 2, 3$
- Definimos $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f_0(x, y) = \alpha(x)(0, x^2)$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos $F_m = A_m + f_m$, onde

$$f_m = S_m \circ \cdots \circ S_1 \circ f_0 \circ S_0^{-1} \circ \cdots \circ S_{m-1}^{-1}.$$

Equivariância – exemplo

- Consideramos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\alpha = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tal que
 - $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = 0$
 - $|\alpha^{(j-1)}| \leq j$ para $j = 1, 2, 3$
- Definimos $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f_0(x, y) = \alpha(x)(0, x^2)$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos $F_m = A_m + f_m$, onde

$$f_m = S_m \circ \cdots \circ S_1 \circ f_0 \circ S_0^{-1} \circ \cdots \circ S_{m-1}^{-1}.$$

- Podemos verificar que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ está nas condições do Teorema 6.

Equivariância – exemplo

- Consideramos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\alpha = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tal que
 - $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = 0$
 - $|\alpha^{(j-1)}| \leq j$ para $j = 1, 2, 3$
- Definimos $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f_0(x, y) = \alpha(x)(0, x^2)$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos $F_m = A_m + f_m$, onde

$$f_m = S_m \circ \cdots \circ S_1 \circ f_0 \circ S_0^{-1} \circ \cdots \circ S_{m-1}^{-1}.$$

- Podemos verificar que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ está nas condições do Teorema 6.
- A sucessão $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é equivariante em relação a $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$.
- Verifica-se que $\|S_m\| \leq Ce^{\theta m}$ com $C = e^{8\varepsilon}$ e $\theta = \varepsilon$ pelo que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|S_n\| \leq \theta.$$

Equivariância – exemplo

- Consideramos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\alpha = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tal que
 - $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = 0$
 - $|\alpha^{(j-1)}| \leq j$ para $j = 1, 2, 3$
- Definimos $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f_0(x, y) = \alpha(x)(0, x^2)$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos $F_m = A_m + f_m$, onde

$$f_m = S_m \circ \cdots \circ S_1 \circ f_0 \circ S_0^{-1} \circ \cdots \circ S_{m-1}^{-1}.$$

- Podemos verificar que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ está nas condições do Teorema 6.
- A sucessão $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é equivariante em relação a $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$.
- Verifica-se que $\|S_m\| \leq Ce^{\theta m}$ com $C = e^{8\varepsilon}$ e $\theta = \varepsilon$ pelo que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|S_n\| \leq \theta.$$

- Como $\omega > 3\varepsilon$ temos $a + \varepsilon < b$ bem como $\theta < b - a - \varepsilon$.

Equivariância – exemplo

- Consideramos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $\alpha = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tal que
 - $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = 0$
 - $|\alpha^{(j-1)}| \leq j$ para $j = 1, 2, 3$
- Definimos $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f_0(x, y) = \alpha(x)(0, x^2)$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos $F_m = A_m + f_m$, onde

$$f_m = S_m \circ \cdots \circ S_1 \circ f_0 \circ S_0^{-1} \circ \cdots \circ S_{m-1}^{-1}.$$

- Podemos verificar que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ está nas condições do Teorema 6.
- A sucessão $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é equivariante em relação a $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$.
- Verifica-se que $\|S_m\| \leq Ce^{\theta m}$ com $C = e^{8\varepsilon}$ e $\theta = \varepsilon$ pelo que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|S_n\| \leq \theta.$$

- Como $\omega > 3\varepsilon$ temos $a + \varepsilon < b$ bem como $\theta < b - a - \varepsilon$.
- Assim, pelo Teorema 6 existem variedades estáveis \mathcal{V}_n e temos $S_m(\mathcal{V}_m) = \mathcal{V}_{m+1}$ para cada $m \in \mathbb{N}$.