



**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**1º Ciclo em Optometria**

**Cálculo I**

Ficha 1

Ano Lectivo 2010/2011

1) Efectue as seguintes operações

a)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$ ;

b)  $\frac{11}{4} + \frac{5}{2}$ ;

c)  $\frac{2}{3} - \frac{3}{2}$ ;

d)  $\frac{3}{2} - \frac{2}{3}$ ;

e)  $\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$ ;

f)  $\frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$ ;

g)  $\frac{3}{2} \div \frac{2}{5}$ ;

h)  $\frac{2}{3} \div \frac{4}{3}$ .

2) Calcule, em  $\mathbb{R}$ , o conjunto solução das seguintes equações

a)  $18x - 43 = 65$ ;

b)  $23x - 16 = 14 - 17x$ ;

c)  $10y - 5(1 + y) = 3(2y - 2) - 20$ ;

d)  $x(x + 4) + x(x + 2) = 2x^2 + 12$ ;

e)  $\frac{x-5}{10} + \frac{1-2x}{5} = \frac{3-x}{4}$ ;

f)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;

g)  $x^2 - 4 = 0$ ;

h)  $3x^2 - 6x = 0$ ;

i)  $x^2 + 6x + 8 = 0$ ;

j)  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ;

k)  $x^2 - 6x + 9 = 0$ ;

l)  $x^2 + x + 1 = 0$ .

3) Determine, em  $\mathbb{R}$ , o conjunto solução das seguintes condições:

a)  $2x + 7 > 3$ ;

b)  $4 - 3x \leq 6$ ;

c)  $1 < 3x + 4 \leq 16$ ;

d)  $0 \leq 1 - x < 1$ ;

e)  $-5 \leq 3 - 2x \leq 9$ ;

f)  $4x < 2x + 1 \leq 3x + 2$ ;

g)  $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$ ;

h)  $(2x + 3)(x - 1) \geq 0$ ;

i)  $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geq 0$ .

4) Determine, em  $\mathbb{R}$ , o conjunto solução das seguintes condições:

a)  $\frac{x-2}{x+2} < 0$ ;

b)  $\frac{x-2}{x+3} \leq 2$ ;

c)  $\frac{x-3}{x-2} > 1$ ;

d)  $\frac{x-2}{2x+3} > -2$ ;

e)  $\frac{3x-2}{2x+1} < -3$ ;

f)  $\frac{\sqrt{2}-x}{x+2} \leq 3$ ;

g)  $\frac{x-2}{1-2x} < \sqrt{3}$ ;

h)  $0 \leq \frac{3x-2}{x+2} \leq 3$ ;

i)  $-1 < \frac{x-2}{x+1} < 3$ .

5) Determine, em  $\mathbb{R}$ , o conjunto solução das seguintes condições:

a)  $x^3 > x$ ;

b)  $x^3 + 3x < 4x^2$ ;

c)  $2x^2 + x \leq 1$ ;

d)  $x^2 + x + 1 > 0$ ;

e)  $x^2 + x > 1$ ;

f)  $x^2 < 3$ ;

g)  $x^2 \geq 5$ ;

h)  $x^3 - x^2 \leq 0$ ;

i)  $x^2 + 2x + 1 > 0$ ;

j)  $x^2 + 3x - 1 < 3x + 2$ ;

k)  $2 - x^2 \geq 2x + 3x^2 + 1$ ;

l)  $4x < x^2 + 3 < 4$ .

6) Determine, em  $\mathbb{R}$ , o conjunto solução das seguintes condições:

a)  $\frac{x-1}{x+1} \geq 2x$ ;

b)  $\frac{x-2}{2x+1} < 3x$ ;

c)  $\frac{x-1}{x+2} > -x$ ;

d)  $\frac{x-3}{x+1} \geq x+1$ ;

e)  $\frac{x-1}{2x+1} \leq x-1$ ;

f)  $3x > \frac{x-2}{1-x} \geq 2x+1$ .



**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**1º Ciclo em Optometria**

**Cálculo I**

Ficha 2

Ano Lectivo 2010/2011

1) Reescreva a expressão, sem usar o símbolo de valor absoluto:

- a)  $|5 - 23|$ ;      b)  $|5| - |-23|$ ;      c)  $|- \pi|$ ;      d)  $|\pi - 2|$ ;  
e)  $|\sqrt{5} - 5|$ ;      f)  $||-2| - |-3||$ ;      g)  $|x - 2|$  se  $x < 2$ ;      h)  $|x - 2|$  se  $x > 2$ ;  
i)  $|x + 1|$ ;      j)  $|2x - 1|$ ;      k)  $|x^2 + 1|$ ;      l)  $|1 - 2x^2|$ .

2) Determine, em  $\mathbb{R}$ , o conjunto solução das seguintes condições:

- a)  $|2x| = 3$ ;      b)  $|3x + 5| = 1$ ;      c)  $|x + 3| = |2x + 1|$ ;      d)  $\left| \frac{2x - 1}{x + 1} \right| = 3$ ;  
e)  $|x - 4| < 1$ ;      f)  $|x + 1| \geq 3$ ;      g)  $1 \leq |x| \leq 4$ ;      h)  $0 < |x - 5| < 1/2$ .

3) Escreva em extensão ou na forma de um intervalo ou de uma reunião de intervalos o conjuntos dos números  $x \in \mathbb{R}$  tais que

- a)  $|x + 1| = 2$ ;      b)  $|x - 3 - 2x| < 3$ ;      c)  $|x + 2| \leq 1$ ;      d)  $|x + 5| \geq 7$ ;  
e)  $2 < |x - 1| \leq 3$ ;      f)  $|x - 2| < 1$ ;      g)  $|x + 2| \geq 2$ ;      h)  $|2x - 5| < 2$ ;  
i)  $|3x + 1| \geq 1$ ;      j)  $|2x + 1| > 5$ ;      k)  $3|x + 2| \leq 1$ ;      l)  $2 + |x + 1| \leq 3$ ;  
m)  $1 - |2x + 1| > 1$ ;      n)  $3|x + 1/2| > 2$ ;      o)  $|1 - 2x| < 2$ ;      p)  $3 < |x| \leq 4$ ;  
q)  $-1 < |x| < 3$ ;      r)  $0 \leq |x - 1| < 2$ ;      s)  $0 < |x - 1| < 2$ ;      t)  $|x + 3| = |x + 1|$ .

4) Escreva em extensão ou na forma de um intervalo ou de uma reunião de intervalos o conjuntos dos números  $x \in \mathbb{R}$  tais que

- a)  $|x^2 - 5x + 3| > 3$ ;      b)  $|x^2 - 5x + 3| \leq 3$ ;      c)  $|x^2 - x - 1| \geq 1$ ;  
d)  $|x^2 - x - 1| < 1$ ;      e)  $|x^2 + x - 1| \leq 1$ ;      f)  $3 \geq |x^2 + 2x + 1| \geq 1$ ;

5) Escreva em extensão ou na forma de um intervalo ou de uma reunião de intervalos o conjuntos dos números  $x \in \mathbb{R}$  tais que

- a)  $\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \geq 2$ ;      b)  $\left| \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} \right| = 1$ ;      c)  $1 \leq \left| \frac{x - 2}{2x + 1} \right| < 3$ ;  
d)  $\left| \frac{x^2 + x - 2}{2x + 1} \right| < 3$ ;      e)  $\left| \frac{2x - 2}{x^2 - 1} \right| \geq 3$ ;      f)  $\left| \frac{x^2 - 3}{x^2 - x} \right| \leq 2$ .

6) Escreva uma inequação da forma  $|x - a| < b$  ou  $|x - a| \leq b$  cujo conjunto solução seja

- a)  $] -1, 1[$ ;      b)  $] -1/2, 1/2[$ ;      c)  $[-1, 2]$ ;  
d)  $] -3, -1[$ ;      e)  $[-1/2, 0]$ ;      f)  $\{0\}$ .

7) Escreva uma inequação da forma  $|x - a| > b$  ou  $|x - a| \geq b$  cujo conjunto solução seja

- a)  $] -\infty, -1[ \cup ] 1, +\infty[$ ;      b)  $] -\infty, 0[ \cup ] 2, +\infty[$ ;      c)  $] -\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ ;  
d)  $] -\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$ ;      e)  $] -\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ ;      f)  $\mathbb{R}$ .



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
1º Ciclo em Optometria

Cálculo I

Ficha 3

Ano Lectivo 2010/2011

- 1) A Velocidade  $v$  é a razão entre a distância percorrida  $d$  e o tempo  $t$  gasto a percorrê-la.
- Identifique a expressão que permite escrever  $t$  como função de  $d$  sempre que a velocidade  $v$  for constante.
  - A distância entre Nova York e Lisboa é 5 500 Km. Quanto tempo demora o percurso entre as duas cidades
    - num jacto a 800 Km/h?
    - para um raio luminoso a 300 000 Km/s?

- 2) Uma haste rígida, feita de material muito leve, de modo que podemos considerar o seu peso desprezável, gira em torno de um eixo. Numa das extremidades, à distância de 1 metro do eixo, está colocado um peso de 3 Kg. Para que a haste fique em equilíbrio (isto é, no plano horizontal do eixo), colocamos um outro peso de  $P$  Kg no outro lado da haste e à distância  $d$  (metros) do eixo; verifica-se experimentalmente que o equilíbrio é conseguido se os valores de  $d$  e  $P$  se correspondem de acordo com a tabela

$d$	1	0.5	0.3	0.1	0.05
$P$	3	6	10	30	60

É possível concluir da análise destes dados que as grandezas  $P$  e  $d$  são inversamente proporcionais.

- Identifique a expressão que permite escrever  $P$  como função de  $d$ .
  - Determine o domínio da função  $P(d)$ .
- 3) A frequência de som  $f$  recebida por um observador fixo, de um objecto que se move à velocidade  $v$  e emite um som de frequência 10 KHz é inversamente proporcional à diferença entre a velocidade do som  $S(=340\text{m/s})$  e  $v$ .
- Sabendo que a constante de proporcionalidade inversa é  $10 S$ , identifique a expressão que permite escrever  $f$  em função de  $v$ .
  - Determine a frequência de som que o observador recebe quando o objecto se move a 50 Km/h.
- 4) Sejam  $c$  e  $f$  duas variáveis representando a mesma temperatura medida respectivamente em graus Celsius (C) e em graus Fahrenheit (F). A relação entre  $c$  e  $f$  é descrita por uma função afim. O ponto de congelamento da água é de  $c = 0^\circ\text{C}$  ou  $f = 32^\circ\text{F}$ . A temperatura de ebulição é de  $c = 100^\circ\text{C}$  ou  $f = 212^\circ\text{F}$ .
- Determine a fórmula de conversão da temperatura em graus Fahrenheit para a temperatura em graus Celsius.
  - Existe alguma temperatura para a qual os valores em graus Celsius e Fahrenheit sejam iguais? Determine-a em caso afirmativo.
  - A relação entre a temperatura absoluta  $k$ , medida em graus Kelvin (K), e a temperatura  $c$ , em graus Celsius (C), é descrita por uma função afim. Sabendo que  $k = 273\text{K}$  quando  $c = 0^\circ\text{C}$  e  $k = 373\text{K}$  quando  $c = 100^\circ\text{C}$  determine  $k$  em função de  $f$ .
- 5) Exprima o raio de uma circunferência em função do perímetro da mesma.
- 6) Um paralelepípedo rectângulo tem dimensões  $a$ ,  $2a$ ,  $3a$ . Exprima  $a$  em função do volume do paralelepípedo.





**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**1º Ciclo em Optometria**

**Cálculo I**

Ficha 5

Ano Lectivo 2010/2011

1) As funções

$$N_1(t) = 12 \times (1.03)^t, \quad N_2(t) = 13 \times (0.19)^t, \quad N_3(t) = 4 \times (1.28)^t \quad \text{e} \quad N_4(t) = 9 \times (0.38)^t$$

descrevem a evolução do número de bactérias (em milhões por mililitro) em quatro colónias distintas ao longo do tempo (em horas), a partir de um certo instante inicial  $t = 0$ .

- a) Qual das populações tem mais bactérias no instante inicial?
- b) Qual das populações tem a maior taxa de crescimento relativo?
- c) Algumas das populações de bactérias estão a decrescer no que diz respeito ao número de indivíduos. Concorda com esta afirmação?
- d) Caso exista, determine o instante no qual as populações descritas por  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  têm o mesmo número de indivíduos.
- e) Esboce os gráficos de  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  e  $N_4$ .

2) Resolva, em  $\mathbb{R}$ , as equações:

- |                                   |                                     |                                  |
|-----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| a) $2^{5x} = 128$ ;               | b) $3^{4x-1} = 81$ ;                | c) $5^{4x} = 1/25$ ;             |
| d) $10^{x^2} = 100^2$ ;           | e) $2^{x^2-5x} = 1/64$ ;            | f) $4^{2x-x^2} = 1$ ;            |
| g) $8^{2x+1} = 16 \cdot 2^{2x}$ ; | h) $x^2 e^x + 3x e^x = 0$ ;         | i) $e^x - e^{-x} = 0$ ;          |
| j) $e^x - e^{2x} = 0$ ;           | k) $4 \times 2^x = 10 \times 5^x$ ; | l) $x^2 5^{-x} - 3.5^{-x} = 0$ . |

3) Calcule

- |                    |                        |   |
|--------------------|------------------------|---|
| a) $\log_2 32$ ;   | b) $5^{2 \log_5 3}$ ;  | c) $\log_{\sqrt{5}} (\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5})$ ; |
| d) $\ln (\ln e)$ ; | e) $\log_{0,1} 0,01$ ; | f) $\log_9 (3\sqrt{3})$ .                         |

4) Resolva, em  $\mathbb{R}$ , as inequações:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $2^{1-x} < \sqrt{2^x}$ ;                               | b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 4^{2-x}$ ;                                    | c) $5^{3-x^2} < 25^x$ ;                                     |
| d) $(0,1)^{x^2-x} \geq 0,01$ ;                            | e) $\log_4 x \leq -7$ ;  | f) $\frac{1}{2^{x^2}} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{3x}$ ; |
| g) $1 + \log_{\frac{1}{6}} x > -\log_{\frac{1}{6}} (x-5)$ | h) $\log_2 (x^2 - 3) > 0$ ;  | i) $\log_{\frac{1}{3}} (x+1) > 0$ ;                         |
| j) $\log_{\frac{1}{e}} (3x+1) > 0$ ;                      | k) $\log_{\frac{1}{2}} (2x) < 2 - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2-x}{x}\right)$ . |   |

5) Resolva as seguintes equações e inequações

a)  $\frac{4e^{2x} - 4e^x - 3}{e^x + 5} = 0$

b)  $\log_x x^2 = 3$

c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} \geq \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^x$

d)  $xe^{x+1} - x < 0$

e)  $2\ln(x-1) - \ln(x+1) \leq 0$

f)  $e^{\frac{x^2-5x}{x^2+1}} > 1$

6) Determine o domínio das seguintes funções

a)  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-e^x}}$

b)  $f(x) = \frac{1}{e^{-2x^2+x-3}}$

c)  $f(x) = e^{\frac{1}{-2x^2+x-3}}$

d)  $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x^2-10x+24}\right)$

e)  $f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$

f)  $f(x) = \ln(|x| - x)$

g)  $f(x) = 3 + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

h)  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

i)  $f(x) = \ln(1 - \ln(x^2 - 5x + 16))$

7) Determine o domínio e contradomínio das seguintes funções

a)  $f(x) = 1 - 10^{2x-1}$

b)  $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2)$

8) Considere a função  $f(x) = e^{x+3} - 1$ .

a) Determine o domínio e o contradomínio de  $f$ .

b) Defina a função inversa de  $f$ .

9) Considere as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = -2 + 3^{2x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = 2 + \log_3(x+1).$$

a) Calcule o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

b) Determine, se existirem os zeros das funções.

c) Caracterize  $f^{-1}$  e  $g^{-1}$ .

10) Seja  $f$  a função real de variável real definida por

$$f(x) = \log_2(9 - x^2).$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de  $f$ .

b) Justifique que a função não admite inversa.



**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**1º Ciclo em Optometria**

**Cálculo I**

Ficha 6

Ano Lectivo 2010/2011

1) Resolva as equações

a)  $\sin x + \sin(2x) = 0$

b)  $\operatorname{tg}(2x) = 2 \cos x$

c)  $\operatorname{tg}(2x) = 3 \operatorname{tg} x$

2) Resolva as equações do exercício anterior no intervalo  $] -\pi, \pi]$ .

3) Se  $x = \cos \alpha + \cos(2\alpha)$  e  $y = \sin \alpha + \sin(2\alpha)$ , mostre que

$$x^2 + y^2 = 2 + 2 \cos \alpha.$$

4) Sendo  $x$  um valor que verifica a condição

$$\operatorname{tg}(5\pi + x) = 3/4 \quad \wedge \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2},$$

calcule a expressão  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ .

5) Sabendo que  $\sin\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{9}$  e que  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , calcule o valor de  $\cos \frac{x}{2}$ .

6) Use a fórmula  $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$  para resolver a equação

$$\sin(2x) + \sin x = \cos \frac{x}{2}.$$

7) Considere a função real de variável real  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = |\sin(6x) + \sin(4x)|.$$

a) Calcule  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(-\frac{\pi}{24}\right)$ .

b) Resolva a equação  $f(x) = |\cos x|$ .

8) Considere a função dada por  $f(x) = \frac{2 \sin(2x)}{\cotg x}$ .

a) Determine o domínio e os zeros de  $f$ .

b) Mostre que a função é par.

c) Resolva a equação  $|f(x)| = |2 \sin x|$ .

9) Considere as funções dadas por  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$  e  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ .

a) Determine o domínio de  $g \circ f$ .

b) Mostre que  $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$ , para todo o  $x$  pertencente ao domínio de  $g \circ f$ .

c) Calcule  $(g \circ f)\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .

10) Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões

- |  |  |  |
|--|--|--|
| $a) \arcsen(1/2)$                                    | $b) \arccos(-\sqrt{3}/2)$                  | $c) \pi/3 - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3)$ |
| $d) \operatorname{sen}(\arccos(-1/2))$               | $e) \cos(\arcsen(-\sqrt{2}/2))$            | $f) \operatorname{tg}(\arcsen(-1/2))$          |
| $g) \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} 1)$      | $h) \cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$ | $i) \arccos(\cos(-\pi/4))$                     |
| $j) \cos(\arcsen(4/5))$                              | $k) \operatorname{sen}(\arccos(-5/13))$    | $l) \operatorname{tg}(\arcsen(3/4))$           |
| $m) \operatorname{cotg}(\arcsen(12/13))$             | $n) \operatorname{sen}(2 \arcsen(4/5))$    | $o) \operatorname{tg}(2 \arccos(-3/5))$        |
| $p) \operatorname{sen}(\arcsen(3/4) + \arccos(1/4))$ | $q) \cos(\arccos(1/4) + \arcsen(3/4))$     |  |

11) Simplifique as expressões:

- |  |   |                      |
|--|---|----------------------|
| $a) \operatorname{sen}(\pi + \arccos x)$ | $b) \cos^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$ | $c) \cos(\arcsen x)$ |
|--|---|----------------------|

12) Resolva as seguintes equações e inequações

- |  |                           |  |
|--|---------------------------|--|
| $a) \frac{1}{2} \arcsen(3x - 2) = 0$                   | $b) e^{2 \cos x + 1} = 1$ | $c) \arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$     |
| $d) \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $e) e^{\cos(2x)} > 1$     | $f) \frac{\cos x - 2}{\log_{\frac{1}{2}} x + 5} > 0$ |

13) Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções

- |   |  |  |
|---|--|--|
| $a) f(x) = \sqrt{\cos x}$                   | $b) f(x) = 2^{1/\operatorname{sen} x}$   | $c) f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$          |
| $d) f(x) = \arccos( x  - 2)$                | $e) f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ | $f) f(x) = 3 \arcsen(2x - 1)$                                |
| $g) f(x) = 1 - \frac{1}{2} \arccos(2x + 1)$ | $h) f(x) = \cos \frac{\pi}{3} + 2 \arcsen \frac{1}{x + 2}$                     | $i) f(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2} + \arcsen(x^2 - 1)\right)$ |

14) Considere a função dada por  $f(x) = 2 + \arcsen(3x + 1)$ .

- Determine o domínio, o contradomínio e os zeros de  $f$ .
- Calcule  $f(0)$  e  $f(-\frac{1}{6})$ .
- Determine as soluções da equação  $f(x) = 2 + \frac{\pi}{3}$ .
- Caracterize a função inversa de  $f$ .

15) Seja  $g$  a definida por  $g(x) = \frac{\pi}{3} - \arcsen(3x)$ .

- Determine o domínio e o contradomínio de  $g$ .
- Resolva a equação  $\operatorname{sen}(g(x)) = 0$ .
- Caracterize a função inversa de  $g$ .

16) Considere as funções  $f$  e  $g$  definidas por

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-2x}\right)\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \pi - \arcsen(x^2 + 2x + 1).$$

- Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ .
- Mostre que  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  para  $x \in D_f$ .
- Determine o contradomínio de  $g$ .

17) Seja  $h$  a função definida por  $h(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$ . Caracterize a função inversa de  $h$ .





**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**1º Ciclo em Optometria**

**Cálculo I**

Ficha 7

Ano Lectivo 2010/2011

1) Determine o interior, o exterior, a fronteira, a aderência e o derivado de cada um dos conjuntos seguintes e indique quais são abertos e quais são fechados.

a)  $A = ]0, 2] \cup [3, 5[ \cup \{6, 7\}$

b)  $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x - 2 < 1\}$

c)  $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 > 0\}$

d)  $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x > 5\}$

e)  $E = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > x\}$

f)  $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2(x - 1) \geq 0\}$

g)  $G = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 - 1 < 3\}$

h)  $H = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} > \frac{x}{x-2}\right\}$

i)  $I = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x+1| \leq 2\}$

j)  $J = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\}$

k)  $K = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \geq |x-3|\}$

l)  $L = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{1-2x}{2x-3}\right| > 2\right\}$

m)  $M = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 16} < 2 - x\right\}$

n)  $N = \{x \in \mathbb{R} : x + |x| < 1\}$

2) Calcule os seguintes limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-x}{x^2-3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^3+1}{30x^7-1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x-1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{3x^3+x^2+x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{30}}{x-5}$

l)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

3) Calcule os seguintes limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^{x-4}-1}{16-x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x}-1}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+4}-e^4}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{3x}-1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1-e^{x^3}}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-e^{2x}}{x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^{8x}}{x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)^3}{e^{2(x-1)}-1}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}$

m)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$

n)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x+2)-\ln 8}{x-2}$

o)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(6+2h)-\ln 6}{h}$

4) Calcule os seguintes limites.

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{x} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(3x)}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1} \\
 d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\operatorname{sen} x)}{x^2} & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen} x} \\
 g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} & h) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right] & i) \lim_{x \rightarrow 2} \left[ (x^2 - 4) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x-2} \right) \right] \\
 j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} & k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x} & l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{\operatorname{sen}(2x)} \\
 m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen}(2x)}{x} & n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{arc} \operatorname{sen}(3x)} & o) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arc} \cos x}{x - 1} \\
 p) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x - 1}{\operatorname{arc} \cos(2x)} & q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(7x)} & r) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x - 1)}{\operatorname{sen}(1 - x)}
 \end{array}$$

5) Calcule os seguintes limites.

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2} & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1 + x} & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1 + x^4} \\
 d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 + 3x^2 + 1) & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x-a)(x-b)} - x] & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(e^{1/x} - 1)] \\
 g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) \right] & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} + \frac{4}{\ln(x^2 + 1)} \right] & i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1) \ln \left( \frac{x+2}{x} \right) \right] \\
 j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3x)}{\ln x^2} & k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) \right] & l) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cosh x - \sinh x)
 \end{array}$$

6) Calcule os seguintes limites laterais.

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} & b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right) \\
 d) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right) & e) \lim_{x \rightarrow 3^+} 3^{1/(x-3)} & f) \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x-1}
 \end{array}$$

7) Calcule os limites laterais das seguintes funções no ponto  $x_0$  indicado. O que pode concluir sobre a existência de  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ?

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 & b) f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } |x| \leq 2 \\ 2 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2 \\
 c) f(x) = \begin{cases} \frac{3x-a}{1-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x-a}{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 & d) f(x) = \begin{cases} 8\sqrt{x-1} & \text{se } x < 5 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}, \quad x_0 = 5 \\
 e) f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2} & f) f(x) = 2^{-1/x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0
 \end{array}$$

8) Escreva as equações das assíntotas das funções definidas por

$$\begin{array}{lll}
 a) f(x) = \frac{2x-1}{2x-6} & b) f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2} & c) f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1} \\
 d) f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-2} & e) f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 2}{x+2} & f) f(x) = \frac{\ln x}{x} \\
 g) f(x) = 2e^{-1/x} & h) f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x & i) f(x) = \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right|
 \end{array}$$



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
1º Ciclo em Optometria

Cálculo I

Ficha 8

Ano Lectivo 2010/2011

1) Estude a continuidade das funções seguintes:

a)  $f(x) = e^{x+1}$

b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

c)  $f(x) = \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x}$

d)  $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$

e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x| + x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} \ln(e^x + 1), & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$

g)  $f(x) = \begin{cases} 2(x+2)e^{2(x+2)}, & x < -2 \\ x \ln(x+3), & x \geq -2 \end{cases}$

h)  $f(x) = \begin{cases} \arcsen \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \\ e^{x/(x+1)-1}, & x < 0 \text{ e } x \neq -1 \\ -1, & x = -1 \end{cases}$

i)  $f(x) = \begin{cases} e^{x+2} - e^2, & x \geq 0 \\ x + \sinh(2x), & x < 0 \end{cases}$

j)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \ln(e-x), & x \leq 0 \\ \frac{-3x}{1 - e^{2x}}, & x > 0 \end{cases}$

k)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

l)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 3^{\cotg x}} & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2) Determine, se possível, a constante  $k$  que torna as seguintes funções contínuas.

a)  $f(x) = \begin{cases} k + x \ln x, & x \geq 1 \\ \frac{e^{x-1} - 1}{2x - 2}, & x < 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{k^2 + 1/e}, & x \geq k \\ e^{k+1}, & x < k \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - e^{1-x}}{1 - x}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)}, & x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \setminus \{0\} \\ k, & x = 0 \end{cases}$

e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x^3}{x^2 + kx^2}, & x \neq 0 \\ 1/3, & x = 0 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} 2 - (x-2) \sin \frac{1}{x-2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$

3) Sejam  $f$  e  $g$  as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{x-1}} & \text{se } x > 1 \\ e^k & \text{se } x = 1 \\ \frac{e^{x+k^2-1} - e^{k^2}}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}}{x} & \text{se } x < 0 \\ k\pi & \text{se } x = 0 \\ \frac{\cos x - \cos(5x)}{2 \sin^2 x} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

a) Determine  $k$  de modo que  $f$ , em  $x = 1$ , seja contínua à esquerda e descontínua à direita.

b) Determine  $k$  de modo que  $f$  seja contínua.

c) Prove que  $g$  é descontínua para  $x = 0$  para qualquer  $k \in \mathbb{R}$ .

d) Determine  $k$  de modo que  $g$  seja contínua à esquerda, no ponto 0.

4) Seja  $h$  a função real de variável real definida por: 
$$h(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(x - 4\pi/3)}{x - \pi/3} & \text{se } x > \pi/3 \\ -6x/\pi & \text{se } x \leq \pi/3 \end{cases}$$

a) Prove que  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} h(x) = -2$ .

b) Considere o intervalo  $[1, 5\pi/6]$ . Mostre que  $-5/\pi$  pertence ao contradomínio de  $h$ .

5) Mostre que

a) a função dada por  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  se anula, pelo menos uma vez, no intervalo  $[\pi, 2\pi]$ ;

b) existe uma, e uma só, solução da equação  $2 \cos x - \cos(2x) = 0$  em  $[\pi/2, \pi]$ ;

c) existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $2x^3 - 5x + 4 = 2$ ;

d) função dada por  $f(x) = 2x^3 - 5x + 4$  admite pelo menos um zero no intervalo  $[-2, 0]$ ;

e) a equação  $x^7 - 3x^2 = 10$ , tem, pelo menos, uma raiz real;

f) a equação  $x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$  tem, pelo menos, uma solução real.

6) Seja  $f$  contínua no intervalo  $[0, 2]$  com  $f(0) = \frac{5}{2}$  e  $f(2) = -1$ . Qual é o número mínimo de zeros que  $f$  pode ter nesse intervalo?

7) Seja  $g$  uma função contínua em  $[-2, 3]$  com  $g(-2) = \frac{1}{2}$ ,  $g(-1) = -1$ ,  $g(0) = 2$ ,  $g(1) = 1$ ,  $g(2) = -2$  e  $g(3) = 5$ . Qual o número mínimo de zeros que  $g$  pode ter nesse intervalo.

8) Em modelos de queda livre, costuma-se supor que a aceleração gravitacional  $g$  é a constante  $9,8m/s^2$ . Na verdade,  $g$  varia com a latitude. Se  $\theta$  é a latitude (em graus) então

$$g(\theta) = 9,78049 [1 + 0,005264 \sin^2(\theta) + 0,000024 \sin^4(\theta)]$$

é uma fórmula que aproxima  $g$ . Usando a máquina de calcular para efectuar os cálculos, mostre que  $g = 9,8$  em algum ponto entre as latitudes  $35^\circ$  e  $40^\circ$ .

9) A temperatura  $T$  (em graus Celsius) na qual a água ferve é dada aproximadamente pela fórmula

$$T(h) = 100,862 - 0,0415\sqrt{h + 431,03}$$

onde  $h$  é a altitude (em metros acima do nível do mar). Usando a máquina de calcular para efectuar os cálculos, mostre que a água ferve a  $98^\circ C$  a alguma altitude entre  $4000m$  e  $4500m$ .

10) Prove que a função  $f : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{se } -3 \leq x < 2 \\ (3x-6)/x & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ , admite máximo e mínimo.

11) Seja  $f : \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin k}{x+1} & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} & \text{se } -\frac{5}{2} \leq x < 2 \end{cases}$

a) Determine  $k$  de modo que  $f$  seja contínua para  $x = 2$ .

b) A função  $f$  é atinge máximo e mínimo em  $[-1, 0]$ ? Justifique.

12) Considere-se a função real de variável real dada por  $f(x) = \begin{cases} x - 2 \sin x & \text{se } x < 0 \\ k^2 & \text{se } x = 0 \\ (x+1)^{1/x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

a) Estude a continuidade de  $f$  no ponto  $x = 0$ .

b) Determine  $k$  de modo que  $f$  seja contínua à direita no ponto  $x = 0$ .

c) Prove que em  $[-\pi, -\pi/2]$  existe uma e, uma só, solução da equação  $f(x) = 0$ .

d) Pode concluir-se que  $f$  é uma função limitada em  $[-\pi, -\pi/2]$ , atingindo aí os seus extremos? Justifique.



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
1º Ciclo em Optometria

Cálculo I

Ficha 9

Ano Lectivo 2010/2011

- 1) Calcule, sempre que possível, as derivadas das funções seguintes nos pontos indicados utilizando a definição e, quando possível, escreva a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  nesses pontos.

a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ ,  $x = 4$

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$

c)  $f(x) = e^{2x+5}$ ,  $x = 2$

d)  $f(x) = x^2 - 3x$ ,  $x = 3$

e)  $f(x) = \ln x$ ,  $x = a \in D_f$

f)  $f(x) = \sqrt{x+1} - 4$ ,  $x = a \in D_f$

g)  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ ,  $x = 0$

h)  $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 & \text{se } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$

- 2) As funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis e  $f$  é invertível, verificando as condições:

$$f(2) = 3, \quad g(2) = -5, \quad f'(2) = -1, \quad f'(-5) = 3, \quad g'(2) = 2 \quad \text{e} \quad g'(3) = 5.$$

Determine os valores de :

a)  $(f + g)'(2)$

b)  $(4f)'(2)$

c)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

d)  $(f \cdot f)'(2)$

e)  $(g \circ f)'(2)$

f)  $(f \circ g)'(2)$

g)  $(f^{-1})'(3)$

h)  $\left(\frac{1}{f}\right)'(2)$ .

- 3) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = x^4 e^{-x}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Calcule  $(g \circ f)'(x)$ .

- 4) Seja  $f$  a função definida por  $f(x) = \arcsen(x+1)$ . Determine  $(f^{-1}(x))'$  dos seguintes modos

a) calcule a função inversa e de seguida a respectiva derivada;

b) directamente.

- 5) Determine a derivada de cada uma das seguintes funções.

a)  $f(x) = (x+3)^5$

b)  $f(x) = \frac{1-x}{x^3+2} + 2x$

c)  $f(x) = \left(\frac{ax-1}{x-b}\right)^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

d)  $f(x) = \sin^4(5x) - \cos^4(5x)$

e)  $f(x) = \operatorname{tg}(3x^2 - 1)$

f)  $f(x) = e^x \sin x + e^{1/x}$

g)  $f(x) = \frac{1-3^x}{\cos x}$

h)  $f(x) = \frac{1}{2} \ln(\cosh(2x))$

i)  $f(x) = \arcsen(\ln x)$

j)  $f(x) = e^{\cos x} + x \sin x$

k)  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$

l)  $f(x) = x^3 \arccos \sqrt{x^2 - 1}$

m)  $f(x) = \log_5(\arctg x)$

n)  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

o)  $f(x) = e^x \cos x$

p)  $f(x) = \frac{x^5 + 1}{e^x - 2}$

q)  $f(x) = x \cosh x$

r)  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(\arccos(x^2))$

6) Um balão meteorológico é solto e sobe verticalmente de modo que a sua distância  $s(t)$  ao solo durante os 10 primeiros segundos de voo é dada por  $s(t) = 6 + 2t + t^2$  na qual  $s(t)$  é expressa em metros e  $t$  em segundos. Determine a velocidade do balão quando

a)  $t = 1$ ,  $t = 4$  e  $t = 8$ ;

b) o balão está a 50m do solo.

7) A posição de uma partícula é dada pela equação do movimento  $s = f(t) = \frac{1}{1+t}$  onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros. Encontre a velocidade da partícula após 2 segundos.

8) Analise a diferenciabilidade das seguintes funções.

a)  $f(x) = |x^2 - 2x|$

b)  $f(x) = |x|^3$

c)  $f(x) = x|x - 1|$

d)  $f(x) = e^{-|x|}$

e)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(x-1) & \text{se } x > 1 \\ \frac{1-x^2}{2x+1} & \text{se } x \leq 1, x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$

g)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

h)  $f(x) = \begin{cases} \arcsen \frac{x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x/(x+1)} - 1 & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ -1 & \text{se } x = -1 \end{cases}$

9) Determine a recta tangente à função dada por  $f(x) = \arcsen \frac{x-1}{2}$ , no ponto de intersecção da função com o eixo das abcissas.

10) Determine a recta tangente à função  $f(x) = \sqrt{x}$ , no ponto de abscissa  $x = 4$ .

11) Considere a função  $f(x) = 1 + 3e^{x+3}$  definida em  $\mathbb{R}$ .

a) Calcule  $f'(-3)$ .

b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  cujo declive é 3e.

12) Mostre que a recta de equação  $y - 3x + \frac{2\pi}{3} = 0$  é a recta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - 2\arccos \frac{3x}{2}$$

e determine o ponto de tangência.

13) Considere a função definida por  $g(x) = e^{\sqrt{x+3}} + \ln(\arctg x)$ .

a) Calcule o domínio de  $g$ .

b) Calcule a derivada de  $g$  no ponto  $x = 1$ .

c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $x = 1$ .

14) Sejam  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  as funções dadas por

$$g(x) = \begin{cases} e^{ax+b} & \text{se } x < 1, \\ 1 + x \ln x & \text{se } x \geq 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1+e^{1/(x-1)}} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

a) Determine  $a$  e  $b$  de modo que  $g$  seja diferenciável no ponto  $x = 1$ .

b) Prove que  $h$  é contínua no ponto  $x = 1$ , mas não é diferenciável nesse ponto.



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1º Ciclo em Optometria

Cálculo I

Ficha 10

Ano Lectivo 2010/2011

1) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ . Mostre que a função  $f$  no intervalo  $[1, 3]$  verifica as condições do Teorema de Rolle e calcule  $c \in ]1, 3[$  tal que  $f'(c) = 0$ .

2) Seja  $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in [0, \pi/2[, \\ 1 & \text{se } x = \pi/2. \end{cases}$$

a) Verifique que  $f(\pi/2) = f(\pi/4)$ .

b) Mostre que  $f$  é contínua e diferenciável no intervalo  $] \pi/4, \pi/2[$ .

c) No intervalo  $] \pi/4, \pi/2[$ , a derivada  $f'$  não tem zeros. Isto contradiz o Teorema de Rolle? Justifique a resposta.

3) Prove que

a) a equação  $\ln(x^2 + 1) = x$  tem no máximo duas soluções em  $\mathbb{R}$ .

b) a função definida por  $f(x) = x^3 + 3x - 2$  tem um só zero em  $\mathbb{R}$ ; mais precisamente em  $]0, 1[$ ;

c) o polinómio  $p(x) = x^n + px + q$  não pode ter mais do que duas raízes se  $n$  for par e não pode ter mais do que três raízes se  $n$  for ímpar ( $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).

4) Mostre que a equação  $\ln x^2 = x - 1$  tem duas raízes em  $]0, +\infty[$  e localize essas soluções.

5) Mostre que a equação  $e^{x-1} = x$  admite apenas a solução  $x = 1$ .

6) Localize os zeros da função definida por  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ .

7) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3x^2 + 1$ . Mostre que a função  $f$  no intervalo  $[-1, 2]$  verifica as condições do Teorema de Lagrange e calcule  $c \in ]-1, 2[$  a que se refere o Teorema de Lagrange.

8) Aplique o Teorema de Lagrange à função definida por  $f(x) = \sqrt{x}$  no intervalo  $[225, 226]$  para calcular um valor aproximado de  $\sqrt{226}$ .

9) Mostre que

a)  $8 + \frac{1}{18} < \sqrt{65} < 8 + \frac{1}{16}$ ;

b)  $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsen 0,6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$ .

10) Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais tais que  $0 < a < b$ . Use o Teorema de Lagrange para provar que

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

e que

$$\frac{b-a}{1+b^2} + \operatorname{arctg} a < \operatorname{arctg} b < \frac{b-a}{1+a^2} + \operatorname{arctg} a$$

e use estes resultado para estimar  $\ln 1,1$  e  $\operatorname{arctg} 1,1$ .

- 11) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{e^x - 1}{e^x}.$$

Aplicando o Teorema de Lagrange à função  $f$  no intervalo  $[0, x]$ , mostre que, para qualquer  $x > 0$ ,

$$x < e^x - 1 < x e^x.$$

- 12) Recorrendo ao Teorema de Lagrange, mostre que

- a)  $e^x > x + 1$  para  $x > 0$ ;                      b)  $\ln \frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}$  para  $x > 0$ ;  
c)  $\operatorname{sen} x < x$  para  $x > 0$ ;                      d)  $e^x < \frac{1}{1-x}$  para  $x \in ]0, 1[$ ;  
e)  $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$  para  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$                       f)  $1 - x \operatorname{sen} x < \cos x < 1$  para  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$   
g)  $\operatorname{tg} x > x$  para  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

- 13) Considere as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \log_2(x+1) \quad \text{e} \quad g(x) = 4x + 1.$$

- a) Determine o domínio de cada uma das funções.  
b) Mostre que no intervalo  $[0, 3]$  as funções  $f$  e  $g$  estão nas condições do Teorema de Cauchy e determine o valor de  $c$  a que se refere o Teorema de Cauchy.

- 14) Sejam  $f$  e  $g$  as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \ln |2x - 1| \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 3x.$$

- a) Indique o domínio de  $f$  e de  $g$ .  
b) Caracterize a função  $f'$ .  
c) Justifique que, embora contínuas em  $[1, 2]$  e diferenciáveis em  $]1, 2[$ , não se pode aplicar o Teorema de Cauchy às funções  $f$  e  $g$ .

- 15) Calcule

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{x^2 - 3x}$                       b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\cos x}}{\operatorname{sen} x - \cos x}$                       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x e^x - x}$   
d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$                       e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$                       f)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) \ln x$   
g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\operatorname{arctg}(x-1)} \right]$                       h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2} \right) \right]$                       i)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[ \operatorname{arcsen} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \right]$   
j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{-x^2})$                       k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{-2} e^x)$                       l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x} 2^x)$   
m)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$                       n)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^{(x+1)/x^2}$ ;                      o)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$   
p)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$                       q)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{1/x}$                       r)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$





**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**1º Ciclo em Optometria**

**Cálculo I**

Ficha 11

Ano Lectivo 2010/2011

1) Determine a derivada de segunda ordem das funções seguintes.

- |  |                                       |                                    |
|--|---------------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x) = \sin(x^3 + 1)$                        | b) $f(x) = \cos(\sin x)$              | c) $f(x) = \ln(x^3 + 1)$           |
| d) $f(x) = \log_{10}(x^2 + 1)$                   | e) $f(x) = e^{\sin(x^3+1)}$           | f) $f(x) = \sin(e^x)$              |
| g) $f(x) = x \sin x$                             | h) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$             | i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$ |
| j) $f(x) = \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 3}\right)$ | k) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$ | l) $f(x) = \frac{x + 1}{\cos(2x)}$ |

- 1) Uma droga é injectada na corrente sanguínea e a sua concentração após  $t$  minutos é dada por  $C(t) = \frac{k}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$  para constantes positivas  $a, b$  e  $k$ . Em que instante ocorre a concentração máxima? O que se pode dizer sobre a concentração após um longo período de tempo?
- 2) Um oleoduto deve ligar dois pontos  $A$  e  $B$  distantes  $3Km$  um do outro e situados em margens opostas de um rio de  $1Km$  de largura. Parte do oleoduto ficará submersa, de  $A$  a  $C$  estando  $C$  na margem oposta, e a restante parte acima do solo ligando  $C$  a  $B$ . Se o custo de operação do oleoduto sob água é quatro vezes o custo da operação no solo, determine a localização de  $C$  que minimize o custo da operação do oleoduto. (Desprezar a inclinação do leito do rio.)
- 3) Suponhamos que um peso é sustentado a 1 m da recta horizontal  $AB$  por meio de um arame em forma de  $Y$ . Se os pontos  $A$  e  $B$  estão separados por 0.8 m, qual é o menor comprimento total de arame que pode ser usado.
- 4) Uma bala de canhão é lançada do solo com velocidade  $v$  segundo um ângulo  $\alpha$ . Em cada momento  $t$  a altura da bala relativamente ao solo é  $y(t) = -4.9t^2 + (v \sin \alpha)t$  e a distância percorrida na horizontal é  $x(t) = (v \cos \alpha)t$ . Verifique que a trajectória da bala é uma parábola e determine a inclinação  $\alpha$  que permite lançar a bala mais longe.
- 5) Uma janela rectangular encabeçada por um semi-círculo tem 3 metros de perímetro. Determine o raio da parte semi-circular de modo que a área total da janela seja máxima.
- 6) Mostre que entre todos os rectângulos com um dado perímetro é o quadrado que tem área máximo e que entre todos os rectângulos com uma área dada é o quadrado o que tem o perímetro mínimo.
- 7) Qual é o triângulo de dois lados iguais e de área 1 com menor perímetro?
- 8) Calcule o volume máximo de uma caixa rectangular de base quadrada com superfície total de  $48 \text{ cm}^2$ .
- 9) Pretende-se construir uma caixa com base rectangular de um rectângulo de cartolina com 16 cm de largura e 21 cm de comprimento cortando-se um quadrado em cada quina. Determine o lado desse quadrado para que a caixa tenha volume máximo.
- 10) Pretende-se construir em folha zincada um cilindro sem tampa com capacidade  $1\ell (= 1 \text{ dm}^3)$ . Determine a mínima área de folha necessária.
- 11) Determine as dimensões do cilindro circular recto de maior volume que pode ser inscrito num cone circular com altura 12 cm e raio da base 5 cm.
- 12) Pretende-se fabricar um recipiente cilíndrico, de base circular, aberto no topo, com capacidade de  $24\pi \text{ cm}^3$ . Se o custo do material usado para a fabricação da base é o triplo do custo do material da superfície lateral, e se não há perda de material, determine as dimensões que minimizam o custo.



**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**1º Ciclo em Optometria**

**Cálculo I**

Ficha 12

Ano Lectivo 2010/2011

- 1) Estude as seguintes funções quanto a zeros, paridade, extremos locais, monotonia, convexidade, pontos de inflexão e assíntotas e faça um esboço do seu gráfico:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$	b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ ;	c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ;
d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ;	e) $f(x) = x - \sqrt{1 - 2x + x^2}$	f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ;
g) $f(x) = \frac{5}{1 + 4e^{-x}}$	h) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$	i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
j) $f(x) = \arcsen \frac{2x}{x^2 + 1}$ ;	k) $f(x) = \frac{1}{ x } +  x $ ;	l) $f(x) = \ln  \ln x $ ;

- 2) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \begin{cases} (x-2)e^x & \text{se } x \geq 0, \\ -2 + \arctg(x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$

- a) Estude a continuidade de  $f$ .
- b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- c) Estude  $f$  quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada  $f'$ .
- d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de  $f$ .
- e) Estude  $f$  quanto à existência de assíntotas.
- f) Prove que o gráfico de  $f$  não tem pontos de inflexão.
- g) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{1/x}$ .

- 3) Seja  $f: [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \begin{cases} \arcsen x & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \ln(x-1) & \text{se } x > 1. \end{cases}$

- a) Estude a continuidade de  $f$  para  $x = 1$ .
- b) Estude  $f$  quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada  $f'$ .
- c) Mostre que  $f$  tem um extremo em  $x = 1 + 1/e$ . Classifique-o e calcule-o.
- d) Determine, caso existam, os pontos de inflexão do gráfico de  $f$ .
- e) Estude  $f$  quanto à existência de assíntotas.
- f) Prove que existe  $x \in ]1 + 1/e, 1 + e[$  tal que  $f(x) = 1$ .

- 4) Seja  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- a) Estude a continuidade e a diferenciabilidade de  $f$ .
- b) Determine os extremos e os intervalos de monotonia de  $f$ .
- c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- d) Conclua que existem duas rectas assíntotas ao gráfico de  $f$  e indique-as.
- e) Prove que existe  $c \in ]1, e[$  tal que  $f'(c) = \frac{1}{e(e-1)}$ .



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
1º Ciclo em Optometria

Cálculo I

Ficha 13

Ano Lectivo 2010/2011

1) Calcule as seguintes primitivas.

a)  $\int (3x^2 + 5x + 1) dx$

b)  $\int (5x^4 + 2x^3 - 1) dx$

c)  $\int (x^2 + 1)^3 dx$

d)  $\int 5\sqrt{5x + 30} dx$

e)  $\int \frac{2x^2 - 6x + 7}{\sqrt{x}} dx$

f)  $\int -\frac{3}{2x^2} + \frac{5}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} dx$

g)  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx$

h)  $\int e^{x+3} dx$

i)  $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

j)  $\int x e^{-x^2} dx$

k)  $\int 2^{x-1} dx$

l)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

m)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

n)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

o)  $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

p)  $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 1} dx$

q)  $\int \frac{4x^3}{x^8 + 1} dx$

r)  $\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x} dx$

s)  $\int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} + \frac{1}{\sin^2 x} dx$

t)  $\int (\cos^2 x + 2 \cos x) \sin x dx$

u)  $\int \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx$

v)  $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

w)  $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

x)  $\int \frac{e^{2x} + \frac{3}{2}}{1 + 3x + e^{2x}} dx$

y)  $\int -\frac{4}{\cos^2 x} dx$

z)  $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

A)  $\int \frac{\arcsen^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

B)  $\int \frac{3x}{\sqrt[5]{1 + 5x^2}} dx$

C)  $\int \cos(2x - \frac{\pi}{4}) dx$

D)  $\int \sinh(2x) \cosh(2x) dx$

E)  $\int e^{x^2 + 2 \sin x} (x + \cos x) dx$

F)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

G)  $\int \frac{\sin(\arctg x)}{1 + x^2} dx$

H)  $\int \frac{\cos(\ln x^2)}{x} dx$

I)  $\int \frac{\tg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

J)  $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

K)  $\int \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 1)} dx$

L)  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

M)  $\int \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} dx$

N)  $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

O)  $\int \frac{x}{\sqrt{7 - (x^4 - 2x^2 + 1)}} dx$

P)  $\int \cos x \cos(2x) dx$

Q)  $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

R)  $\int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$

S)  $\int x \sqrt{x^2 + 9} + \sin(5x - 4) dx$

T)  $\int \frac{1}{x \cos^2(\ln x)} dx$

U)  $\int \frac{e^x}{\sqrt{9 - e^{2x}}} dx$

V)  $\int \frac{1}{\sqrt{1 - 5x^2}} dx$

$$W) \int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx \quad X) \int \frac{e^x + e^{2x}}{\sqrt{2 - 2e^{2x}}} dx \quad Y) \int \frac{\ln x \operatorname{sen}(\ln^2 x)}{x} dx$$

2) Calcule as seguintes primitivas utilizando o método de primitivação por partes.

$$\begin{array}{lll} a) \int x e^x dx & b) \int x 2^{-x} dx & c) \int x \ln x dx \\ d) \int x \cos(3x) dx & e) \int x \operatorname{sen} x \cos x dx & f) \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx \\ g) \int \operatorname{arc} \cos x dx & h) \int \operatorname{arc} \cotg x dx & i) \int \operatorname{sen}(\ln x) dx \\ j) \int e^{x^2} x^3 dx & k) \int e^{-x^2} x^3 dx & l) \int (x^2 + 1) \cos x dx \\ m) \int e^x \cos x dx & n) \int 3^x \cos x dx & o) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx \\ p) \int \ln^2 x dx & q) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx & r) \int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} dx \\ s) \int e^{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x} dx & t) \int \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{(1 + x^2)^2} dx & u) \int \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \end{array}$$

3) Calcule as seguintes primitivas utilizando a substituição indicada.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 2}} dx, & x = \frac{1}{t} \\ b) \int \sqrt{9 - x^2} dx, & x = 3 \operatorname{sen} t \\ c) \int \frac{\ln x}{x^2} dx, & x = e^t \\ d) \int \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \operatorname{sen}^2 x} dx, & \cos x = t \\ e) \int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx, & x = t^2 - 1 \\ f) \int \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}} dx, & x = \operatorname{sen}^2 t \\ g) \int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx, & t = \sqrt{x} \\ h) \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}} dx, & t = \operatorname{sen} x \\ i) \int \frac{x^3}{\sqrt{x - 1}} dx, & \sqrt{x - 1} = t \\ j) \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx, & x = 2 \operatorname{sen} t \\ k) \int \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx, & \ln x = t \\ l) \int \frac{1}{x(1 - x)} dx, & x = \operatorname{sen}^2 t \\ m) \int \frac{1}{e^x + 1} dx, & x = -\ln t \\ n) \int \frac{x + e^{\sqrt{1 - x}}}{\sqrt{1 - x}} dx, & x = 1 - t^2 \end{array}$$

4) Calcule as seguintes primitivas de funções racionais.

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{x}{(x - 1)(x + 2)(x + 3)} dx & b) \int \frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} dx & c) \int \frac{x}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx \\ d) \int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} dx & e) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx & f) \int \frac{x^2}{(x - 1)^3} dx \\ g) \int \frac{1}{(x^2 + x - 2)(x + 5)} dx & h) \int \frac{3x^2 - 4}{(2 - x)^2(x^2 + 4)} dx & i) \int \frac{x^4}{x - 1} dx \\ j) \int \frac{3x + 1}{(x^3 - x)(x + 5)} dx & k) \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx & l) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x^2} dx \end{array}$$

$$m) \int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx \quad n) \int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx \quad o) \int \frac{2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)} dx$$

5) Calcule as seguintes primitivas usando, sempre que indicada, a substituição sugerida.

$$\begin{array}{lll} i) \int \frac{e^{12x} - e^{6x} + 1}{e^{9x} + e^{6x}} dx & ii) \int \frac{2^x}{1 - 8^x} dx & iii) \int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{-2x} + 1} dx \\ t = e^{3x} & t = 2^x & t = e^x \\ iv) \int \ln(\sqrt{x}) dx & v) \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & vi) \int \frac{\ln^3 x + 1}{x} dx \\ vii) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx & viii) \int \frac{x^{1/2}}{1 + x^{1/3}} dx & ix) \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx \\ t = \sin x & x = t^6 & t = \operatorname{tg} x \\ x) \int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx & xi) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4 - e^{4x}}} dx & xii) \int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx \\ xiii) \int \frac{\ln^3 x + 1}{x \ln^2 x + x} dx & xiv) \int \frac{3^{x/3}}{3^{x/2} + 3^{x/4}} dx & xv) \int \frac{\cotg x + 1}{\cotg x - 1} dx \\ t = \ln x & 3^x = t^{12} & t = \cotg x \\ xvi) \int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}} dx & xvii) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx & xviii) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx \\ xix) \int \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx & xx) \int \frac{1 + \sin x}{\cos x (2 + \sin x)} dx & xxi) \int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt[4]{2x - 1}} \\ t = \cos x & t = \sin x & t^4 = 2x - 1 \\ xxii) \int e^{x-1} 3^x dx & xxiii) \int \sin(2x) \cos(x/2) dx & xxiv) \int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x dx \\ xxv) \int \frac{1}{x\sqrt{5 + x^2}} dx & xxvi) \int \frac{\sqrt[4]{x}}{x - \sqrt{x}} dx & xxvii) \int \frac{\sin^3(2x) + \sin(2x)\cos(2x)}{1 + \cos(2x)} dx \\ x = \sqrt{5} \operatorname{tg} t & x = t^4 & t = \cos(2x); \\ xxviii) \int \ln(1 + x^2) dx & xxix) \int \frac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx & xxx) \int \cos(\ln x) dx \\ xxxi) \int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx & xxxii) \int x\sqrt{x-1} dx & xxxiii) \int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} dx \\ x = t^2 & x = t^2 + 1 & t = \cos x \end{array}$$

6) Calcule  $f(x)$  sabendo que

$$a) f'(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} \text{ e } f(0) = 2; \quad b) f'(x) = (x^2 - 2x + 3) \ln x \text{ e } f(1) = 7/18;$$

- 7) Seja  $P(t)$  a população de uma bactéria numa colónia no tempo  $t$  (em minutos). Supondo que  $P(0) = 100$  e que  $P(t)$  aumenta a uma taxa (variável) de  $20e^{3t}$ , quantas bactérias existem ao fim de 50 dias?
- 8) Uma partícula parte da origem e movimenta-se sobre o eixo das abcissas com uma velocidade (em centímetros por segundo) dada por  $v(t) = 7 + 4t^3 + 6\sin(\pi t)$ . Encontre a distância percorrida em 200 segundos.
- 9) A aceleração (no instante  $t$ ) de um ponto em movimento sobre uma recta coordenada é dada por  $a(t) = \sin^2 t \cos t$  (em  $ms^{-2}$ ). Em  $t = 0$  o ponto está na origem e a sua velocidade é  $10m/s$ . Determine a sua posição no instante  $t$ .
- 10) A velocidade (no instante  $t$ ) de um ponto que se move ao longo de uma recta é  $v(t) = t/e^{2t}$  (em  $ms^{-2}$ ). Se o ponto está na origem quando  $t = 0$ , encontre a sua posição no instante  $t$ .



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
1º Ciclo em Optometria

Cálculo I

Ficha 14

Ano Lectivo 2010/2011

1) Calcule os seguintes integrais.

i)  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

ii)  $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx$

iii)  $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx$

iv)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos 2x dx$

v)  $\int_0^1 e^{t+e^t} dt$

vi)  $\int_0^1 x \arctg x dx$

vii)  $\int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$

viii)  $\int_0^\pi \sin^3 u du$

ix)  $\int_0^1 \frac{1}{x-3} dx$

x)  $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx$

xi)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 \theta d\theta$

xii)  $\int_1^3 e^{-x} dx$

xiii)  $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

xiv)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4} dx$

xv)  $\int_{-2}^0 \frac{x+10}{(x-1)^2} dx$

xvi)  $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

xvii)  $\int_0^8 |x^2-6x+8| dx$

xviii)  $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x+3}{x^2+2} dx$

xix)  $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx \quad (t = \sqrt{x})$

xx)  $\int_{\sqrt{2}/2}^1 x \arcsen x^2 dx$

xxi)  $\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{25+3x}} dx$

xxii)  $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx$

xxiii)  $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{x+2} dx$

xxiv)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5} dx$

xxv)  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$

xxvi)  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 t dt$

xxvii)  $\int_1^e x^2 \ln x dx$

xxviii)  $\int_1^0 \frac{e^x(e^x-1)^2}{e^x+1} dx \quad (t = e^x)$

xxix)  $\int_{-2}^3 3x + |x^2-4x-5| dx$

xxx)  $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx \quad (x = 2 \sin t)$

xxxi)  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$

xxxii)  $\int_0^1 \cosh x dx$



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1º Ciclo em Optometria

Cálculo I

Ficha 15

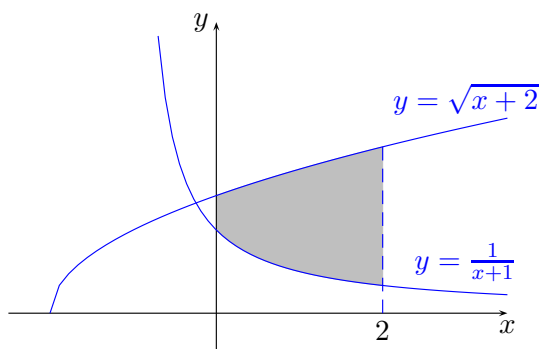
Ano Lectivo 2010/2011

1) Calcule a área da região do plano limitada

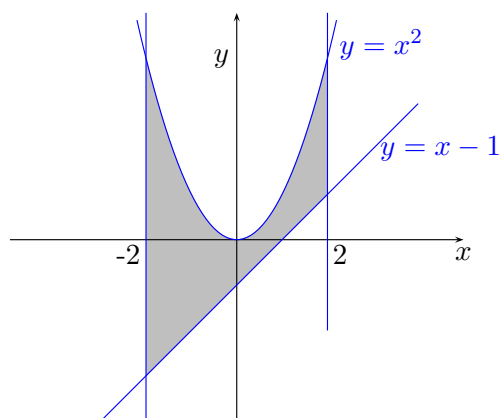
- pela curva de equação  $y = x^2$ , o eixo das abcissas e as rectas de equação  $x = 1$  e  $x = 3$ ;
- pelo sinusóide  $y = \sin x$  e o eixo das abcissas quando  $0 \leq x \leq 2\pi$ ;
- pela parábola de equação  $y = -x^2 + 4x$  e o eixo das abcissas;
- pelas curvas de equação  $y = \sqrt{x}$  e  $y = x^2$ ;
- pela parábola de equação  $y = -x^2 + 2x + 8$ , o eixo das abcissas e as rectas de equação  $x = -1$  e  $x = 3$ ;
- pelos gráficos das funções  $f(x) = \arcsin x$  e  $g(x) = \arccos x$  e pela recta  $x = 0$ .
- pela parábola com vértice no ponto  $(0, 1)$  e que passa pelos pontos  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  e o eixo das abcissas;
- pelas circunferências de equação  $x^2 + y^2 = 2x$  e  $x^2 + y^2 = 4x$  e pelas rectas de equação  $y = x$  e  $y = 0$ ;
- pelas linhas de equação  $xy = 3$  e  $y + x - 4 = 0$ ;
- pelo gráfico da função  $y = \arctan x$  e pelas rectas de equação  $x = 1$  e  $y = 0$ .

2) Calcule a área das regiões sombreadas

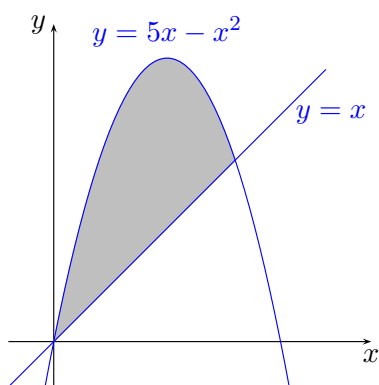
a)



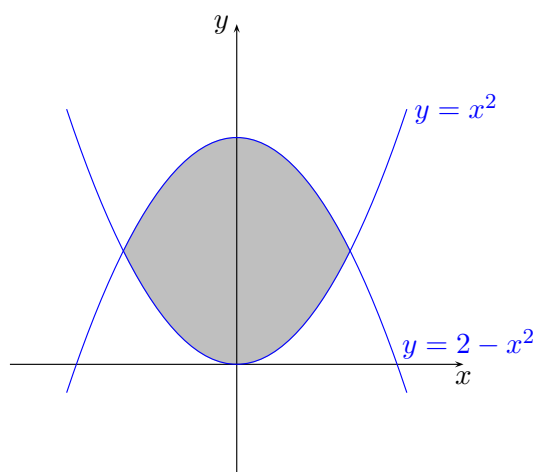
b)



c)



d)



3) Calcule os comprimentos das seguintes curvas planas.

- a) Curva  $C$  determinada pelo gráfico de função  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cosh x$ .
- b) Arco da curva  $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ , com  $a > 0$ , de  $x = 0$  a  $x = a$ .
- c) Arco da curva  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ , de  $t = 0$  a  $t = 4$ .

4) Calcule a área de superfície

- a) do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo das abcissas da curva  $y = x^3$  entre  $x = 1$  e  $x = 2$ ;
- b) do cone de altura 3 e raio da base 4;
- c) do sólido de revolução gerado pela curva de equação  $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ , com  $a > 0$ , de  $x = 0$  a  $x = a$ .
- d) do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo das abcissas, do domínio plano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4x\}.$$

5) Calcule os volumes dos seguintes sólidos.

- a) Uma esfera de raio 2.
- b) Um cilindro de raio da base 3 e altura 3.
- c) Gerado pela rotação da área, no primeiro quadrante, limitada pela parábola  $y^2 = 8x$  e pela recta  $x = 2$ .
  - i) Em torno do eixo das abcissas;
  - ii) Em torno da recta  $x = 2$ ;
  - iii) Em torno do eixo das ordenadas.
- d) Gerado pela rotação da curva definida pelo gráfico da função  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^{x+1}$ , em torno da recta  $y = 1$ .

6) Calcule o volume do sólido de revolução obtido ao rodar em torno do eixo dos  $xx$  a região do plano definida por  $x^2 + y^2 \leq 4$  e  $0 \leq y \leq x$ .

7) Seja  $D$  a região do plano definida por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq e^x, y > -x^2 - 1, |x| < 1\}.$$

- a) Calcule a área da região plana  $D$ .
- b) Seja  $D_1$  a parte da região  $D$  que está no 3º quadrante. Calcule o volume do sólido de revolução que se obtém girando  $D_1$  em torno do eixo dos  $yy$ .